Задача 1. Сколько среди целых чисел от 10 до 1000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковые цифры?

Решение.

Очевидно, что в заданном диапазоне 9 трёхзначных чисел, содержащих по три одинаковые цифры: 111, 222, …, 999. В единственном четырёхзначном числе заданного диапазона 1000 также встречаются три одинаковые цифры.
Таким образом, среди целых чисел от 10 до 1000, десять чисел имеют в своей записи ровно три одинаковые цифры.

Задача 2. В клетках таблицы, содержащей 4 строки и 7 столбцов, расставьте натуральные числа так, чтобы их сумма в каждой строке была равна 28, а в каждом столбце – 15. Можно ли осуществить требуемое? Если да, то покажите, как; если нет, то объясните, почему.

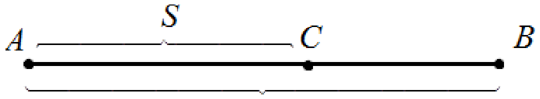
Решение.

Предположим, что мы осуществили требуемое.
Так как сумма чисел одной строки равна 28, то сумма всех чисел четырёх строк равна $S = 28 \cdot 4 = 112$.
Так как сумма чисел одного столбца равна 15, то сумма всех чисел семи столбцов равна $S = 15 \cdot 7 = 105$.
Получившиеся суммы не равны, мы пришли к противоречию, значит, осуществить требуемое нельзя.

Задача 3. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 17 км, выехал велосипедист со скоростью 12 км в час. Одновременно с ним из А в В вышел пешеход со скоростью 5 км в час. Велосипедист доехал до В, повернул и поехал назад с той же скоростью. Через сколько часов после начала движения они встретятся?

Решение.

Пусть до момента встречи в точке С пешеход прошел путь S км. Тогда велосипедист проехал путь $(34 - S)$ км.



17 км

Время движения пешехода: $t = \frac{S}{5}$. Время движения велосипедиста: $t = \frac{34 - S}{12}$.

Получим, $\frac{S}{5} = \frac{34 - S}{12}$, $12S = 170 - 5S$, $17S = 170$, $S = 10$ км. А следовательно, $t = \frac{10}{5} = 2$ ч.
Таким образом, через два часа после начала движения пешеход и велосипедист встретятся.

Задача 4. Есть двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Яйцо должно вариться 15 минут. Как сварить яйцо, переворачивая часы минимальное число раз?

Решение.

Число 15 можно получить из чисел 11 и 7 за минимальное число действий следующим образом: $15 = 11 + 11 - 7$. Этот вариант соответствует следующим действия с песочными часами:

1) Одновременно запускам часы на 7 и 11 минут.
2) Как только 7-минутные часы завершат свою работу, ставим вариться яйцо. При этом на 11-минутных часах остается еще 4 минуты.
3) Когда 11-минутные часы закончат свою работу, то переворачиваем их, и варим яйцо еще 11 минут.

Таким образом, яйцо будет вариться ровно 15 минут.

Задача 5. Решите числовой ребус: ААА–АА–А=ВВ.

Решение.

Представим заданные числа в виде: $AAA = 111 \cdot A$, $AA = 11 \cdot A$, $BB = 11 \cdot B$.
Тогда получим уравнение: $111 \cdot A - 11 \cdot A - A = 11 \cdot B$, $99 \cdot A = 11 \cdot B$, $9 \cdot A = B$.
Так как A и B – это цифры, то единственным решением уравнения $9 \cdot A = B$ будет: $A = 1$, $B = 9$.
Таким образом, решение ребуса: 111–11–1=99.

Задача 6. Найдите десять натуральных чисел, сумма и произведение которых равно двадцати.

Решение.

Если взять 10 единиц, то произведение будет равно 1. Если 4 единицы заменить двойками, то произведение будет равно 16, а если 5 единиц заменить двойками, то – 32. Следовательно, как минимум 6 единиц присутствует в искомой последовательности:

$$\begin{cases} 1+1+1+1+1+1+a+b+c+d = 20 \\ 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d = 20 \end{cases}, \quad \begin{cases} a+b+c+d = 14 \\ a \cdot b \cdot c \cdot d = 20 \end{cases}.$$

Продолжим анализировать произведение. Возможно следующие варианты:
$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 20 = 20$ – не удовлетворяет условию по сумме;
$1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10 = 20$ – удовлетворяет всем условиям;
$1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 = 20$ – не удовлетворяет условию по сумме;
$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$ – не удовлетворяет условию по сумме.
Таким образом, получили следующую последовательность натуральных чисел:
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 10.

Задача 7. Поезд проходит мимо светофора за 5 с, а мимо платформы длиной 150 м за 15 с. Найдите длину поезда и его скорость.

Решение.

Пусть длина поезда L, а его скорость υ.

Время движения поезда мимо светофора: $t_1 = \dfrac{L}{\upsilon}$.

Время движения поезда мимо платформы: $t_2 = \dfrac{L+150}{\upsilon}$.

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} 5 = \dfrac{L}{\upsilon} \\ 15 = \dfrac{L+150}{\upsilon} \end{cases}$, $\begin{cases} 5\upsilon = L \\ 15\upsilon = L+150 \end{cases}$. Вычитая из второго уравнения первое, получим, $10\upsilon = 150$, $\upsilon = 15$ м/с $= 54$ км/ч. Из первого уравнения найдем $L = 5\upsilon = 75$ м.

Таким образом, длина поезда 75 метров, а его скорость 54 км/ч.

Задача 8. Бизнесмен ежедневно приезжал на станцию в одно и то же время, и в это же время за ним приезжала машина, на которой он ехал на дачу. Однажды бизнесмен приехал на станцию на 55 минут раньше обычного, сразу пошел навстречу машине и приехал на дачу на 10 минут раньше обычного. Во сколько раз скорость бизнесмена меньше скорости машины?

Решение.

Пусть $\upsilon_Б$ – скорость бизнесмена, $\upsilon_М$ – скорость машины, L – путь от станции до дачи, l – путь, который бизнесмен прошел пешком.

Время, которое бизнесмен шел пешком, $t = \dfrac{l}{\upsilon_Б}$, а с другой стороны это же время к нему навстречу ехала машина: $t = 55 - \dfrac{l}{\upsilon_М}$.

Экономия во времени возникает из-за того, что после встречи машине не надо ехать оставшееся расстояние l до станции и еще l в обратном направлении. Таким образом, получим, $10 = \dfrac{L}{\upsilon_М} - \dfrac{L-2l}{\upsilon_М}$.

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{l}{\upsilon_Б} = 55 - \dfrac{l}{\upsilon_М} \\ 10 = \dfrac{L}{\upsilon_М} - \dfrac{L-2l}{\upsilon_М} \end{cases}$, $\begin{cases} \dfrac{l}{\upsilon_Б} = 55 - \dfrac{l}{\upsilon_М} \\ 10 = \dfrac{2l}{\upsilon_М} \end{cases}$, $\begin{cases} \dfrac{l}{\upsilon_Б} = 55 - \dfrac{l}{\upsilon_М} \\ l = 5\upsilon_М \end{cases}$,

$\begin{cases} \dfrac{5\upsilon_М}{\upsilon_Б} = 55 - \dfrac{5\upsilon_М}{\upsilon_М} \\ l = 5\upsilon_М \end{cases}$, $\dfrac{5\upsilon_М}{\upsilon_Б} = 50$, $\dfrac{\upsilon_М}{\upsilon_Б} = 10$.

Таким образом, скорость бизнесмена в 10 раз меньше скорости машины.

Задача 9. Сумма 1990 натуральных чисел – нечётное число. Каким числом – чётным или нечётным – является произведение этих чисел?

Решение.

Так как сумма чисел является нечётным числом, то количество нечётных слагаемых – нечётно. Всего слагаемых 1990, т.е. чётное количество, значит, количество чётных слагаемых – также нечётно (есть как минимум одно чётное число). Следовательно, произведение этих чисел будет чётным числом.

Задача 10. Три утенка и четыре гусенка весят 2 кг 500 г, а четыре утенка и три гусенка весят 2 кг 400 г. Сколько весит 1 гусенок?

Решение.

Пусть масса утенка $m_у$, а масса гусенка $m_г$. Тогда имеем следующую систему уравнений:
$\begin{cases} 3m_у + 4m_г = 2500 \\ 4m_у + 3m_г = 2400 \end{cases}$. Первое уравнение умножим на 4, а второе – на 3: $\begin{cases} 12m_у + 16m_г = 10000 \\ 12m_у + 9m_г = 7200 \end{cases}$.
Вычтем из первого уравнения второе: $7m_г = 2800$, $m_г = 400$ г.
Таким образом, 1 гусенок весит 400 г.