Итогового повторения по теме "Производная. Применение производной."

Производная в заданиях ЕГЭ-2015

«…нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира…»

Н.И. Лобачевский.

Цели урока:

1. Образовательные: повторить и обобщить знания учащихся по теме "Применение производной", систематизировать способы деятельности учащихся по применению производной к исследованию функций, рассмотреть методы решения заданий ЕГЭ, связанных с понятием производной .
2. Развивающие: развивать способности применять теоретические знания на практике, развивать навыки работы с тестовыми заданиями, логическое мышление, память, внимание, развивать навыки самоконтроля.
3. Воспитательные: воспитывать ответственное отношение к изучению математики, трудолюбие, взаимопомощь, волю и настойчивость в достижении поставленной цели.

Тип урока: обобщающего повторения (90 мин.**)**

Оборудование урока: компьютер, интерактивная доска.

ХОД УРОКА

I. Организация начала занятия.

Учащимся сообщается тема урока и цели, подчеркивается актуальность повторения данной темы для подготовки к ЕГЭ.

II. Проверка домашнего задания.

Домашнее задание:

1.Решите неравенство $f'(x)+g'(x)\le 0$, если $f(x)=2x^3+12x^2$, $g(x)=9x^2+72x$

Ответ: $[-4;-3]$

2.Решите уравнение $f'(x)=0$, если $f(x)=3\sin x-4\cos x-2x$

Ответ: $2arctg\frac{4\pm\sqrt{21}}{5}+2\pi k, k\in Z$

III. Историческая справка: один из учащихся готовил сообщение по данной теме.

Дифференциальное исчисление создано **Ньютоном и Лейбницем** сравнительно недавно, в конце XVII столетия.

Большой вклад в развитие дифференциального исчисления внесли:

- Архимед, который задолго до этого решил задачу на построение касательной к спирали, сумел найти максимум функции f (x) = x² (a-x).

- Ж.Лагранж (1736-1813), который ввёл современные обозначения у', f '.

- Исаак Ньютон (1643-1727), проводивший математические исследования, при помощи которых легче всего было понять природу производной.

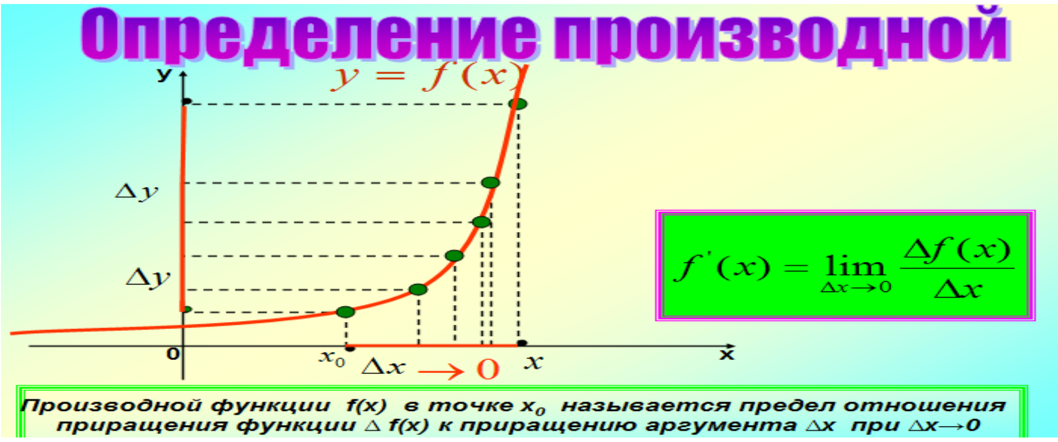
- Пьер Ферма (1601-1665), математическое определение производной которого было принято всеми математиками, успешно применявшими в своём методе нахождения экстремумов многочленов задачи о построениях касательных к кривым.

- Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-176), который установил геометрический смысл производной, как тангенс угла наклона касательной. С его именем связаны имена выдающихся личностей, термины и понятия: Эпоха Просвещения, Пётр I, Россия, Ньютон, рококо, арифмометр, кратер на Луне, подводная лодка, «Философский век».

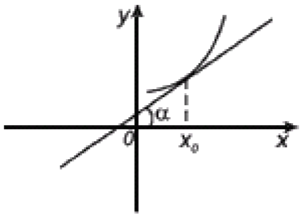
IV. Основные вопросы теории:

1. **Определение**: *производной функции у = f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, если таковой предел существует.*

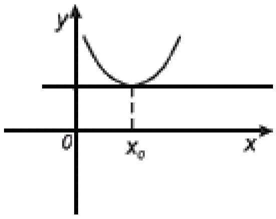
Функцию, имеющую конечную производную, называют ***дифференцируемой.***
Процесс вычисления производной называется **дифференцированием**.



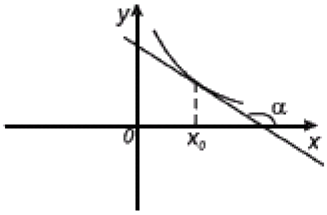
2. **Геометрический смысл производной:** *значение производной f '(x) при данном значении аргумента x равно тангенсу угла, образованного с положительным направлением оси Ox касательной к графику функции f(x) в точке M(x, f(x)).* $k = tg\alpha = f'(x_0)$.



$f'(x_0) = tg\alpha > 0$



$f'(x_0) = tg\alpha = 0$



$f'(x_0) = tg\alpha < 0$

3. **<u>Механический смысл производной</u>**: *производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 - это скорость изменения функции $f(x)$ в точке x_0.*

$\upsilon(t) = x'(t)$ – *скорость*

a $(t) = \upsilon'(t)$ - *ускорение*

4. **Правила вычисления производных:**

Правило 1: (производная от произведения числа на функцию). Справедливо равенство
$(c\,f\,(x))' = c\,f\,'\,(x)$,
где с – любое число.

Другими словами, **производная от произведения числа на функцию** равна **произведению этого числа на производную функции**.

Правило 2: (производная суммы функций). Производная суммы функций вычисляется по формуле
$(f\,(x) + g\,(x))' = f\,'\,(x) + g'\,(x)$,
то есть **производная от суммы функций** равна **сумме производных** этих функций.

Правило 3: (производная разности функций). Производная разности функций вычисляется по формуле
$(f\,(x) - g\,(x))' = f\,'\,(x) - g'\,(x)$,
то есть **производная от разности функций** равна **разности производных** этих функций.

Правило 4: (производная произведения двух функций). Производная произведения двух функций вычисляется по формуле
$(f\,(x)\,g\,(x))' = f\,'\,(x)\,g\,(x) + f\,(x)\,g'\,(x)$,

Другими словами, **производная от произведения двух функций** равна **производной от первой функции, умноженной на вторую функцию, плюс первая функция, умноженная на производную от второй функции.**

Правило 5: (производная частного двух функций). Производная от дроби (частного двух функций) вычисляется по формуле

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(f(x)\right)^2},$$

Определение. Рассмотрим функции $f\,(x)$ и $g\,(x)$. Сложной функцией или «функцией от функции» называют функцию вида
$f\,(g\,(x))$
При этом функцию $f\,(x)$ называют **внешней функцией**, а функцию $g\,(x)$ – **внутренней функцией**.

Правило 6: (производная сложной функции). **Производная сложной функции** вычисляется по формуле
$[\,f\,(g\,(x))]' = f\,'\,(g\,(x))\,g'\,(x)$

Другими словами, для того, чтобы найти **производную от сложной функции $f\,(g\,(x))$ в точке x** нужно **умножить производную внешней функции, вычисленную в точке $g\,(x)$, на производную внутренней функции, вычисленную в точке x.**

5. Таблица производных часто встречающихся функций: повторить с учащимися основные формулы.

Функция	Формула для производной	Название формулы
$y = c$, где с – любое число	$y' = 0$	Производная от постоянной функции
$y = x^c$, где с – любое число	$y' = c\,x^{c-1}$	Производная степенной функции
$y = e^x$	$y' = e^x$	Производная от экспоненты (показательной функции с

		основанием e)
$y = a^x$ где a – любое положительное число, не равное 1	$y' = a^x \ln a$	Производная от показательной функции с основанием a
$y = \ln x, \quad x > 0$	$y' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$	Производная от натурального логарифма
$y = \log_a x, \quad x > 0$ где a – любое положительное число, не равное 1	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad x > 0$	Производная от логарифма по основанию a
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	Производная синуса
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	Производная косинуса
$y = \mathrm{tg}\, x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	Производная тангенса
$y = \mathrm{ctg}\, x$, $x \neq \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	Производная котангенса
$y = \arcsin x, \quad \lvert x \rvert \leq 1$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \lvert x \rvert < 1$	Производная арксинуса
$y = \arccos x, \quad \lvert x \rvert \leq 1$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \lvert x \rvert < 1$	Производная арккосинуса
$y = \mathrm{arctg}\, x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$	Производная арктангенса
$y = \mathrm{arcctg}\, x$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$	Производная арккотангенса

6.Таблица производных сложных функций:

Функция	Формула для производной
$y = (kx + b)^c$, где c – любое число.	$y' = kc\,(kx + b)^{c-1}$,
$y = (f(x))^c$, где c – любое число.	$y' = c \cdot (f(x))^{c-1} \cdot f'(x)$
$y = e^{kx + b}$	$y = ke^{kx + b}$

$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = a^{kx+b}$ где a – любое положительное число, не равное 1	$\left(a^{kx+b}\right)' = a^{kx+b} \cdot \ln a \cdot k$
$y = a^{f(x)}$ где a – любое положительное число, не равное 1	$y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
$y = \ln(kx+b)$, $kx+b>0$	$\left(\ln(kx+b)\right)' = \dfrac{k}{kx+b}$, $kx+b>0$
$y = \ln(f(x))$, $f(x)>0$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $f(x)>0$
$y = \log_a(kx+b)$, $kx+b>0$ где a – любое положительное число, не равное 1	$\left(\ln(kx+b)\right)' = \dfrac{k}{(kx+b)\cdot \ln a}$, $kx+b>0$
$y = \log_a(f(x))$, $f(x)>0$ где a – любое положительное число, не равное 1	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)\cdot \ln a}$, $f(x)>0$
$y = \sin(kx+b)$	$y' = k\cos(kx+b)$
$y = \sin(f(x))$	$y' = \cos(f(x))\cdot f'(x)$
$y = \cos(kx+b)$	$y' = -k\sin(kx+b)$
$y = \cos(f(x))$	$y' = -\sin(f(x))\cdot f'(x)$
$y = \mathrm{tg}(kx+b)$, $kx+b \neq \dfrac{\pi}{2}+n\pi, \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$	$y' = \dfrac{k}{\cos^2(kx+b)}$, $kx+b \neq \dfrac{\pi}{2}+n\pi, \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$
$y = \mathrm{tg}(f(x))$, $f(x) \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n, \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$, $f(x) \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n, \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$
$y = \mathrm{ctg}(kx+b)$, $kx+b \neq n\pi, \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$	$y' = -\dfrac{k}{\sin^2(kx+b)}$, $kx+b \neq n\pi, \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$
$y = \mathrm{ctg}(f(x))$, $f(x) \neq \pi n, \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$	$y' = -\dfrac{f'(x)}{\sin^2(f(x))}$, $f(x) \neq \pi n, \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$

$y = \arcsin(kx + b),\ \lvert kx+b\rvert \le 1$	$y' = \frac{k}{\sqrt{1-(kx+b)^2}},\ \lvert kx+b\rvert < 1$
$y = \arcsin(f(x)),\ \lvert f(x)\rvert \le 1$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}},\ \lvert f(x)\rvert < 1$
$y = \arccos(kx + b),\ \lvert kx+b\rvert \le 1$	$y' = -\frac{k}{\sqrt{1-(kx+b)^2}},\ \lvert kx+b\rvert < 1$
$y = \arccos(f(x)),\ \lvert f(x)\rvert \le 1$	$y' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}},\ \lvert f(x)\rvert < 1$
$y = \mathrm{arctg}(kx + b)$	$y' = \frac{k}{1+(kx+b)^2}$
$y = \mathrm{arctg}(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$
$y = \mathrm{arcctg}(kx + b)$	$y' = -\frac{k}{1+(kx+b)^2}$
$y = \mathrm{arcctg}(f(x))$	$y' = -\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

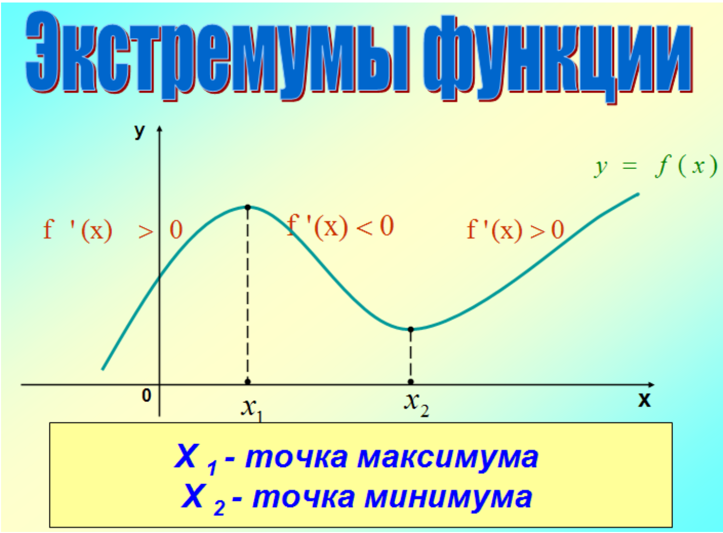
7. Уравнение касательной к графику функций:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

8. Промежутки монотонности функции: *промежутки возрастания и убывания функции называются промежутками* ***монотонности.***

9. Точки экстремума функции: ***точки максимума и точки минимума функции.***

Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются ***критическими точками*** этой функции. Эти точки очень важны при анализе функции и построении её графика, потому что только в этих точках функция может иметь ***экстремум*** (*минимум* или *максимума).*



<u>Достаточные условия экстремума</u>

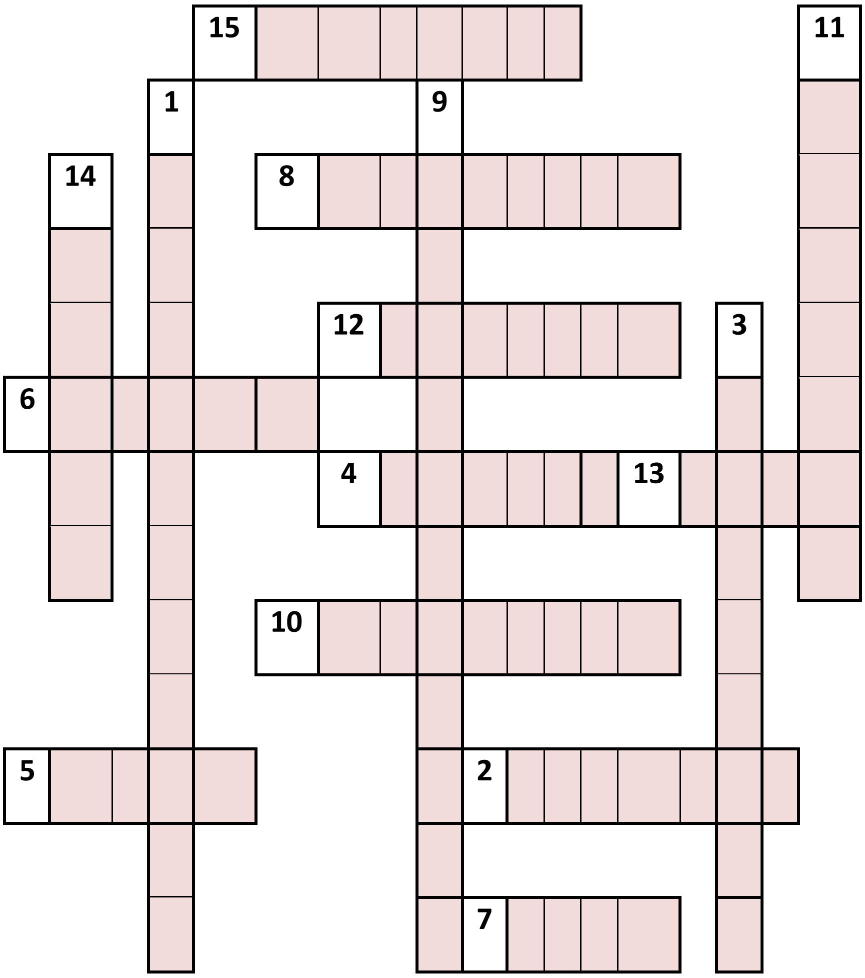
Если производная при переходе через точку $\boldsymbol{x_0}$ меняет свой знак с плюса на минус, то $\boldsymbol{x_0}$ - точка **<u>максимума.</u>**
Если производная при переходе через точку $\boldsymbol{x_0}$ меняет свой знак с минуса на плюс, то $\boldsymbol{x_0}$ - точка **<u>минимума.</u>**

<u>Необходимое условие экстремума</u>

Если $\boldsymbol{x_0}$ - точка экстремума функции $f(x_0)$ и производная существует в этой точке, то $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$.

V. Устная работа:
№1. Математический кроссворд:
Чтоб урок шел без запинки,
Начнем его с легкой разминки.

1. Угол ее наклона выражает геометрический смысл производной.
2. Великий немецкий ученый, философ, математик, физик, юрист, языковед,
 создатель математического анализа, основоположник большой математической школы.
3. Раздел физики, помогающий понять смысл производной.
4. Точка интриганка, точка … .
5."Microsoft Windows в переводе на русский "Компания …"
6. Имя английского физика и математика, автора сочинения "Математические начала натуральной философии"
7. Маленькая, серенькая на коврике лежит. Что это?
8. Утверждение, которое в ходе исследовательской работы подтверждается или опровергается.
9. Синоним понятию "дифференциальное исчисление"
10. Производная- это….
11. Внешний носитель информации в компьютере.
12. Устройство вывода информации в компьютере.
13. Одна из эффективных форм проверки знаний учащихся.
14. "Любите … - источник знаний".
15. Соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y, зависящее от x.



№2. По следующим данным назовите промежутки возрастания, убывания, точки максимума, минимума функции .

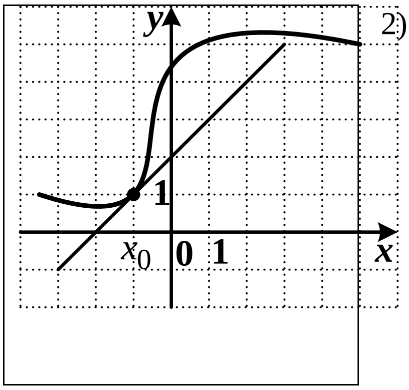
X	(-3:0)	0	(0:4)	4	(4:8)	8	(8:+ ∞)
f'(X)	+	0	-	0	+	0	-
f(X)		-3		-5		6	

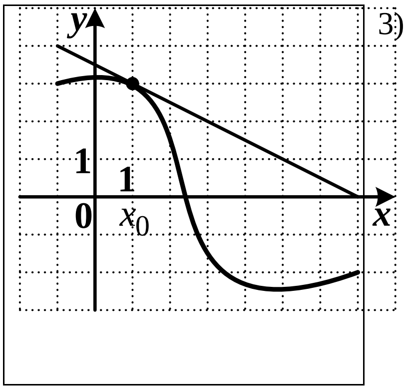
№3. Найти соответствие между функцией и её производной.

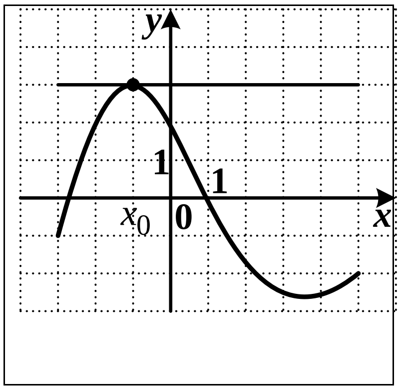
1. C	2. $\sqrt{x}$	3. x	4. $-\frac{1}{\sin^2 x}$	5. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	6. $\frac{1}{1+x^2}$
7. e^x	8. $\arcsin x$	9. a^x	10. $\sin x$	11. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	12. $a^x \ln a$
13. x^n	14. $tg\ x$	15. lgx	16. $\cos x$	17. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	18. $\arccos x$
19. 1	20. $\frac{1}{x\ln 10}$	21. $\frac{1}{x}$	22. nx^{n-1}	23. $\log_a x$	24. $-\sin x$
25. $arcctg\ x$	26. $-\frac{1}{1+x^2}$	27. 0	28. $\frac{1}{\cos^2 x}$	29. $arctg\ x$	30. $\frac{1}{x}$
31. $\cos x$	32. $\ln x$	33. $ctgx$	34. $\frac{1}{x\ln a}$	35. e^x	36. $-\frac{1}{x^2}$

№4

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.

1) 

2) 

3) 

Ответы:

№ 1	№ 2	№ 3
1	− 0,5	0

VI. Письменные тренировочные задания:

№1. Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t)=-2t^2+20t-7$, где x(t) координата точки в момент времени t. В какой точке координатной прямой произойдет мгновенная остановка?
Решение:
Скорость материальной точки v (t) является производной ее координаты x(t).
$v(t)=x'(t)$, $v(t) = (-2t^2 + 20t - 7)$, $v(t) = -4t + 20$, $v(t) = 0$, $-4t +20 = 0$, $t = 5$
$x(5)=-2 *5^2+20*5-7$, $x(5) = 43$.
Ответ: 43
№ 2. Найдите значение производной функции $y = 4x^5 - e^x$ в точке $x_0 = 0$.
Решение:
$y`=20x^4 - e^x$
$y`(0)= -1$ Ответ: -1

<u>VII. Задания №8 в вариантах ЕГЭ:</u>

1. Найдите длину промежутка возрастания – убывания функции:

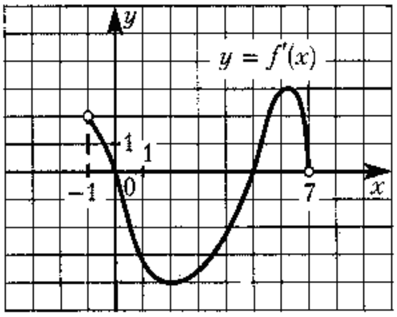
Теоретический материал:

Теорема 1. Если во всех точках открытого промежутка *X* выполняется неравенство *f `(x)≥0* (причём равенство *f `(x)=0* выполняется лишь в отдельных точках и не выполняется ни на каком сплошном промежутке), то функция *y = f(x)* возрастает на промежутке *X.*

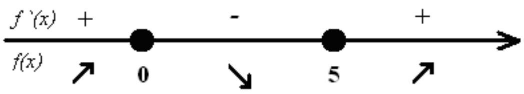
Теорема 2. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f`(x) \leq 0$ (причём равенство $f`(x)=0$ выполняется лишь в отдельных точках и не выполняется ни на каком сплошном промежутке), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.

Задание №1

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-1; 7)$. На рисунке изображен график ее производной. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и запишите в ответе максимальную длину промежутка убывания.



Решение:



Функция убывает на отрезке [0;5].
Длина отрезка убывания 5 – 0 = 5

Ответ: 5.

2. Найдите число точек экстремума:

Теоретический материал:

Для удобства условимся, внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называть *стационарными*, а внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует, - *критическими*.

Теорема (достаточные условия экстремума).

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

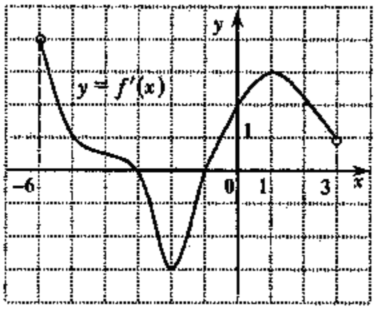
а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f`(x)<0$, а при $x > x_0$ выполняется неравенство $f`(x)>0$, то $x = x_0$ – точка минимума функции $y = f(x)$;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f`(x)>0$, а при $x > x_0$ выполняется неравенство $f`(x)<0$, то $x = x_0$ – точка максимума функции $y = f(x)$;

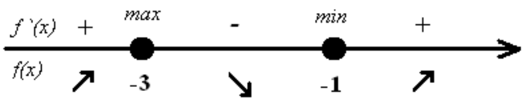
в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева, и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремумов нет.

Задание №2

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 3)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите точку максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-6; 3)$.



Решение:



На промежутках от [–6; –3) и (–1; 3] *f `(x)*>0 (функция *y = f(x)* возрастает на этом промежутке), на промежутке (–3; –1) *f `(x)*<0 (функция *y = f(x)* убывает на этом промежутке)
Точка является точкой максимума, если её производная равна нулю, слева от x_0 положительна, а справа отрицательна.
На заданном рисунке таких точек **только одна**
(–3).

Ответ: –3.

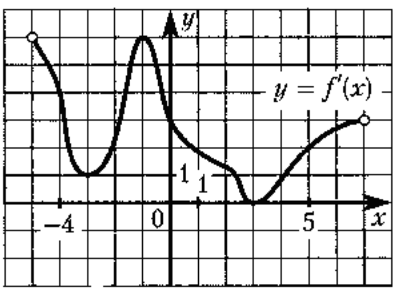
3. Найдите наибольшее – наименьшее значение функции на промежутке:

Теоретический материал:

1. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нём и своего наибольшего и своего наименьшего значений.
2. Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать на концах отрезка, так и внутри него.
3. Если наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.

Задание №3

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 7)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $[-4; 5]$.



Решение:
Функция *y = f(x)* возрастает на промежутке, где её производная *y = f `(x)* положительна.
На интервале [–4;1) и (1: 5] производная принимает положительное значение, значит функция на отрезке [–4; 5] только возрастает. Следовательно, наибольшего своего значения она достигает в правом конце этого отрезка при x_0=5.

Ответ: 5.

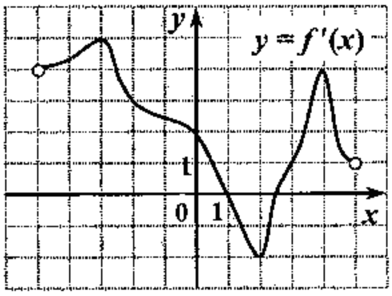
4.1. Найдите угловой коэффициент касательной, значение производной в точке касания:

Теоретический материал:

Исходя из геометрического смысла производной, если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f`(a)$ выражает угловой коэффициент касательной и поскольку $k = tg\ \alpha$, то верно равенство: $f`(a) = k = tg\ \alpha$.

Задание №4.1

К графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$ проведена касательная. Найдите ее угловой коэффициент, если на рисунке изображен график производной этой функции.



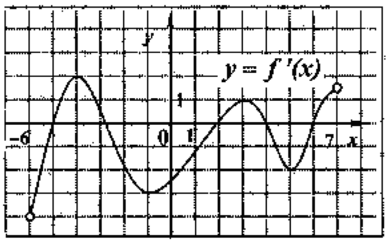
Решение:
В точке $x_0 = -2$ $f`(-2) =$ **3**, поэтому $k =$ **3**.

Ответ: **3**

4.2. Найдите наибольшее – наименьшее значение углового коэффициента касательной:

Задание №4.2

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 7)$. На рисунке изображен график производной этой функции. Укажите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ имеет наибольший угловой коэффициент.



Решение:
Согласно графику производной на заданном промежутке наибольшее значение производная принимает в точке $x_0 = -4$ и $f`(-4) = 2$,
поэтому $k = 2$
Ответ: **2.**

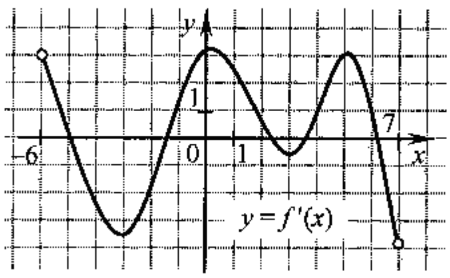
4.3. Касательные параллельны некоторой прямой, найдите количество точек касания:

Теоретический материал:

Две прямые заданные уравнениями
$y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ будут параллельны, если $к_1 = к_2$ и $в_1 = в_2$.

Задание №4.3

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 7)$. На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные параллельные прямой $y = 6 - x$ (или совпадающие с ней). Найдите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.



Решение:

Если касательные параллельны прямой *y = 6 – x*, то угловые коэффициенты этих прямых равны, т.е. *k* = –1. Следовательно, *f `(x)*= –1. По графику производной видно, что данное уравнение имеет ровно три решения. (Прямая у = –1 пересекается с графиком производной в трёх точках).

Ответ: 3.

5. Различные задачи на использование графика производной:

Задание №5

На рисунке 1 изображены прямые, являющиеся касательными к графику функции $y = f(x)$ в точках x_0, x_1, x_2, x_3. Определите количество положительных чисел среди значений производной $y = f'(x)$ в очках x_0, x_1, x_2, x_3.

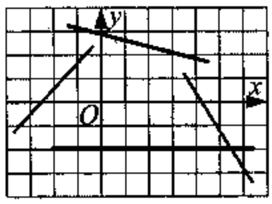


Рис. 1

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

Решение:

Поскольку справедливы равенства

f `(a) = k = tg, где - угол наклона касательной α

между касательной и положительным направлением оси *Ox*. Если угол – острый, то тангенс угла принимает положительное значение, следовательно *f `()* >0. На графике данному условию соответствует только одна прямая. α

Ответ: 1.

<u>VIII. Самостоятельная работа</u>

Тестовое задание

Вариант 1

1. *Найти производную функции* $\mathbf{f(x)=5x^4 – 7x^3 + x + \pi}$ А) $20x^4 - 21x^3 + x + \pi$ В) $20x^3 – 21x^2 + \pi$ Б) $20x^3 – 21x^2 +1$ Г) $9x^3 – 14x^2 + 1$		1 А Б В Г
2. Найти производную функции **f(x)=2 sin x - 3 cos x + 8** А) 2 cos x - 3 sin x В) 2 cos x + 3 sin x Б) 2 cos x - 3 sin x +5 Г) cos x + sin x +5		2 А Б В Г
3. Точка движется прямолинейно по закону $\mathbf{S (t)= 2t^3 – 0,5t^2 + 3t}$ *(S – путь в метрах, t – время в секундах). Вычислить скорость движения точки в момент времени t=1c.* А) 8 м/с В) 10 м/с Б) 7 м/с Г) 4,5 м/с		3 А Б В Г
4. Найти производную сложной функции $\mathbf{f(x)= (3 – 2x)^3}$ А) $3 (3 - 2x)^2$ В) $6 (3 – 2x)^2$ Б) $-3 (3 – 2x)^2$ Г) $-6 (3 –2x)^2$		4 А Б В Г
5. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $\mathbf{y= 3x^3 – 2x + 1}$ *в его точке с абсциссой* $x_0 = 1$ А) 5 В) 9 Б) 7 Г) 11		5 А Б В Г
6. Найти вторую производную функции $y= \dfrac{x^2-5}{x+2}$		6

Тестовое задание

Вариант 2

1. *Найти производную функции* **$f(x)=3x^4 - 7x^3 + x + 6$** А) $12x^4 - 21x^3 + x + 6$ В) $12x^3 - 21x^2 + 6$ Б) $12x^3 - 21x^2 + 1$ Г) $6x^3 - 14x^2 + 1$		1 А Б В Г
2. *Найти производную функции* **$f(x)=2\sin x + 3\cos x + 8$** А) $2\cos x + 3\sin x$ В) $2\cos x - 3\sin x$ Б) $2\cos x + 3\sin x + 4$ Г) $\cos x - \sin x + 4$		2 А Б В Г
3. *Точка движется прямолинейно по закону* **$S(t)= 2t^3 - 0{,}5t^2 + 3t$** *(S – путь в метрах, t – время в секундах). Вычислить скорость движения точки в момент времени t= 2с.* А) 25 м/с В) 20 м/с Б) 22 м/с Г) 18 м/с		3 А Б В Г
4. *Найти производную сложной функции* **$f(x)= (4x - 9)^7$** А) $7(4x - 9)^6$ В) $-63(4x - 9)^6$ Б) $6(4x - 9)^7$ Г) $28(4x - 9)^6$		4 А Б В Г
5. *Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции* **$y= 3x^2 - 2x + 1$** *в его точке с абсциссой* $x_0 = 1$ А) 4 В) 2 Б) 1 Г) 5		5 А Б В Г
6. *Найти вторую производную функции* $y=\dfrac{x^2+2}{x-5}$		6

Тестовое задание

Вариант 3

1. *Найти производную функции* **$f(x)=4x^4 - 6x^3 + 2x + \pi$** А) $16x^4 - 18x^3 + 2x + \pi$ В) $16x^3 - 18x^2 + \pi$ Б) $16x^3 - 18x^2 + 2$ Г) $9x^3 - 12x^2 + 2$		1 А Б В Г
2. *Найти производную функции* **$f(x)=\frac{1}{x} + x^6$** А) $\frac{1}{x^2} + x^5$ В) $-\frac{1}{x^2} + x^x$ Б) $\frac{1}{x^2} + 6x^5$ Г) $-\frac{1}{x^2} + 6x^5$		2 А Б В Г
3. *Точка движется прямолинейно по закону* **$S(t)= t^5 - t^4 + 6$** *(S – путь в метрах, t – время в секундах). Вычислить скорость движения точки в момент времени t=2c.* А) 48 м/с В) 70 м/с Б) 54 м/с Г) 88 м/с		3 А Б В Г
4. *Найти производную сложной функции* **$f(x)= (5 + 2x)^3$** А) $3(5 + 2x)^2$ В) $6(5 + 2x)^2$ Б) $3(5 + 2x)^3$ Г) $15(5 + 2x)^2$		4 А Б В Г
5. *Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции* **$y= 3x^2 - 5x + 1$** *в его точке с абсциссой $x_0 = 2$* А) 3 В) 1 Б) 8 Г) 7		5 А Б В Г
6. *Найти вторую производную функции* $y=\frac{x^2-3}{x+3}$		6

Тестовое задание

Вариант 4

1. *Найти производную функции* **$f(x)=2x^5 - 7x^2 + x + \pi$** А) $10x^4 - 14x^3 + x + \pi$ В) $10x^3 - 14x^2 + \pi$ Б) $10x^3 - 14x^2 + 1$ Г) $12x^3 - 7x^2 + 1$		1 А Б В Г ☐☐☐☐
2. *Найти производную функции* **f(x)=2 sin x - 3 cos x + 7** А) 2 cos x - 3 sin x В) 2 cos x + 3 sin x Б) 2 cos x - 3 sin x +5 Г) cos x + sin x +5		2 А Б В Г ☐☐☐☐
3. *Точка движется прямолинейно по закону* **$S(t)= 2t^3 - 0{,}5t^2 + 3t$** *(S – путь в метрах, t – время в секундах). Вычислить скорость движения точки в момент времени t=1c.* А) 8 м/с В) 10 м/с Б) 7 м/с Г) 4,5 м/с		3 А Б В Г ☐☐☐☐
4. *Найти производную сложной функции* **$f(x)= (3x - 7)^5$** А) $5(3x - 7)^4$ В) $-35(3x - 7)^4$ Б) $15(3x - 7)^4$ Г) $4(3x - 7)^4$		4 А Б В Г ☐☐☐☐
5. *Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции* **$y= 3x^2 - 7x + 10$** *в его точке с абсциссой $x_0 = 1$* А) 18 В) 11 Б) 23 Г) 8		5 А Б В Г ☐☐☐☐
6. *Найти вторую производную функции* $y= \frac{4-x^2}{x+1}$		6

Тестовое задание

Вариант 5

1. *Найти производную функции* **$f(x)=8x^4 - 7x^3 + x + 3\pi$** А) $32x^4 - 21x^3 + x + \pi$ В) $32x^3 - 21x^2 + \pi$ Б) $32x^3 - 21x^2 + 1$ Г) $9x^3 - 14x^2 + 1$		1 А Б В Г ☐☐☐☐
2. *Найти производную функции* **f(x)=2 sin x + cos x + 9** А) 2 cos x + sin x В) 2 cos x - sin x Б) 2 cos x+ sin x +5 Г) cos x - sin x +5		2 А Б В Г ☐☐☐☐
3. *Точка движется прямолинейно по закону* **$S(t)= 2t^5 - 0{,}5t^4 + 3t$** *(S – путь в метрах, t – время в секундах). Вычислить скорость движения точки в момент времени t=1c.* А) 8 м/с В) 10 м/с Б) 7 м/с Г) 11 м/с		3 А Б В Г ☐☐☐☐
4. *Найти производную сложной функции* **$f(x)= (31 - 2x)^7$** А) $-14(31 - 2x)^6$ В) $217(31 - 2x)^6$ Б) $-2(31 - 2x)^6$ Г) $14(31 - 2x)^6$		4 А Б В Г ☐☐☐☐
5. *Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции* **$y= -2x^2 + 3x + 5$** *в его точке с абсциссой $x_0 = -1$* А) 7 В) 0 Б) 1 Г) 5		5 А Б В Г ☐☐☐☐
6. *Найти вторую производную функции* $y=\dfrac{5-x^2}{x+3}$		6

Тестовые задание в форме ЕГЭ (5 вариантов)

Ключ к тестовым заданиям

Задания / Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	Б	В	А	Г	Б	$\frac{-2}{(x+2)^3}$
2	Б	В	А	Г	А	$\frac{54}{(x-5)^3}$
3	Б	Г	А	В	Г	$\frac{12}{(x+3)^3}$
4	Б	В	А	Б	В	$\frac{6}{(x+1)^3}$
5	Б	В	Г	А	А	$\frac{-8}{(x+3)^3}$

Vlll. Домашнее задание:

Составить тест по теме “Применение производной”. Задания могут быть с выбором ответа или с кратким ответом, например:

Найти производную

Найти точки максимума или минимума

Найти промежутки возрастания или убывания

Найти наибольшее значение функции и т.д.

Работа в парах- каждый сделал тест для соседа по парте, проверили друг у друга работу, на следующем уроке.

Xl. Итоги урока. Рефлексия.

Довольны ли вы собой, своей работой?

Закончите фразу:

«Сегодня на уроке я повторил …»

«Сегодня на уроке я научился…»

Литература:

Алгебра и начала анализа. 10 – 11 классы.. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений Ш.А. Алимов. – 11 изд., перераб. – М. : Просвещение, 2011.

Математика. Подготовка к ЕГЭ-2010/Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион-М, 2015.

ЕГЭ-2015 : Математика : самое полное издание типовых вариантов заданий для подготовки к ЕГЭ / авт.-сост. И.В.Ященко, И.Р.Высоцкий; под ред. А.Л.Семёнова, И.В.Ященко. — Москва: АСТ: Астрель, 2014. — 93, [3] с. — (Государственная итоговая аттестация). (26.10.2014)

ЕГЭ 2015. Математика. 50 вариантов типовых тестовых заданий/ И.Р.Высоцкий, П.И.Захаров, С.Е.Посицельский, А.В.Семенов, М.А.Семенова, В.А.Смирнов, С.А.Шестаков, Д.Э.Шноль, И.В.Ященко; под ред. И.В.Ященко. — М. : Издательство «Экзамен», 2015. — 246 [2] с. (Серия «ЕГЭ. 50 вариантов. Типовые тестовые задания»). (04.12.2014)

ЕГЭ 2015. Математика : типовые экзаменационные варианты : 36 вариантов / под ред.И.В. Ященко. — М. : Издательство «Национальное образование», 2015. — 272 с. — (ЕГЭ. ФИПИ — школе). (03.12.2014)

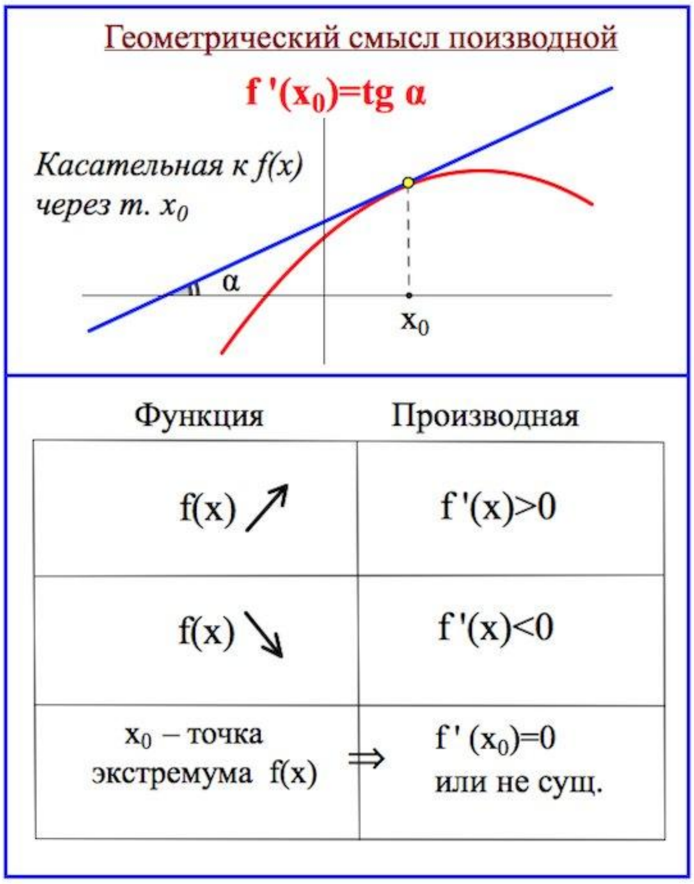
ЕГЭ 2015. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2 / И.Р.Высоцкий, П.И.Захаров, В.С.Панферов, С.Е.Посицельский, А.В.Семенов, М.А.Семенова, И.Н.Сергеев, В.А.Смирнов, С.А.Шестаков, Д.Э.Шноль, И.В.Ященко; под ред. И.В.Ященко. — М. : Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2015.— 215, [1] с. (Серия «ЕГЭ. 30 вариантов. Типовые тестовые задания») (02.12.2014)

ЕГЭ 2015. Математика. Типовые тестовые задания / И.Р.Высоцкий, П.И. Захаров, В.С.Панферов, С.Е.Посицельский, А.В.Семенов, М.А.Семенова, И.Н.Сергеев, В.А.Смирнов, С.А.Шестаков, Д.Э.Шноль, И.В.Ященко; под ред. И.В.Ященко. — М. : Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2015. — 56 с. (Серия «ЕГЭ. Типовые тестовые задания») (01.12.2014)

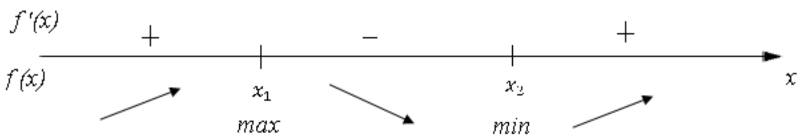
Семенов А. В.Оптимальный банк заданий для подготовки к ЕГЭ. Единый государственный экзамен 2015. Математика. Учебное пособие. / А. В. Семенов, А. С. Трепалин, И. В. Ященко, П. И. Захаров; под ред. И. В. Ященко; Московский Центр непрерывного математического образования. — М.: Интеллект-Центр, 2015. — 88 с. (28.11.2014)

Производная в заданиях ЕГЭ-2015:

Задания №8:



Связь между производной и свойствами функции:



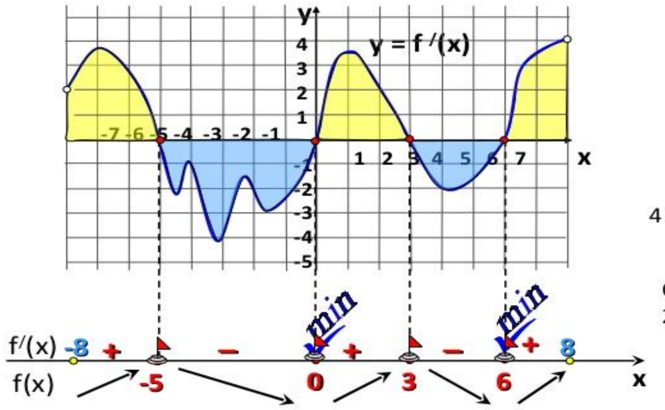
Ответ:
Если на некотором интервале f/(x) > 0, то на данном интервале функция возрастает.
Если на некотором интервале f/(x) < 0, то на данном интервале функция убывает.
Если в некоторой точке x1 – функция меняет знак с «-» на «+», то x1 точка min.
Если в некоторой точке x2 – функция меняет знак с «+» на «-», то x2 точка max.

! Пожалуйста, будьте предельно внимательны в следующем. Смотрите, график ЧЕГО вам дан! Функции или ее производной . **Если дан график производной**, то интересовать нас будут только знаки функции и нули. **Никакие «холмики» и «впадины» не интересуют нас в принципе!** Они Вас будут интересовать если, вам дан график функции

Задание №1.

По этой схеме мы можем дать ответы на многие вопросы тестов.

Исследуйте функцию y =f (x) на экстремум и укажите количество ее точек минимума.

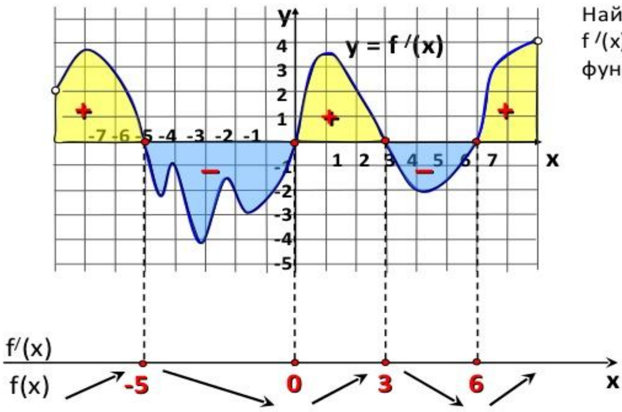


4 точки экстремума,

Ответ:
2 точки минимума

Задание №2.

На рисунке изображен график производной функции y =f (x), заданной на промежутке (- 8; 8). Исследуем свойства графика и мы можем ответить на множество вопросов о свойствах функции, хотя графика самой функции не представлено!

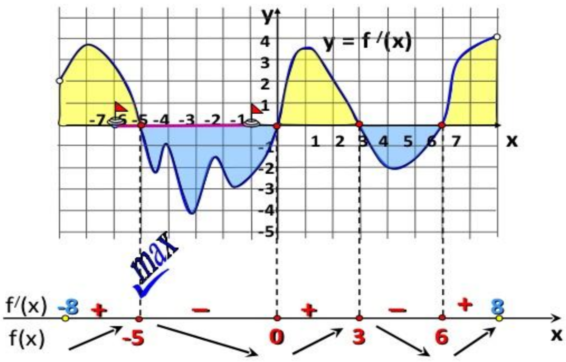


Найдем точки, в которых f ′(x)=0 (это нули функции).

Задание №3

Пример

Найдите точку экстремума функции y =f (x) на отрезке [– 6; –1]

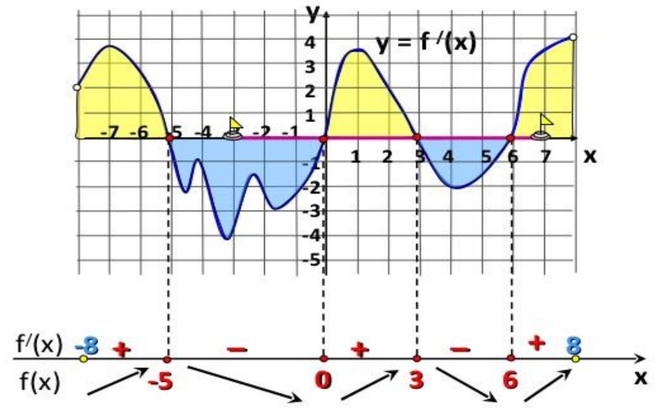


Ответ: $x_{max} = -5$

Задание №4

Пример

Найдите количество точек экстремума функции y =f (x) на отрезке [– 3; 7]

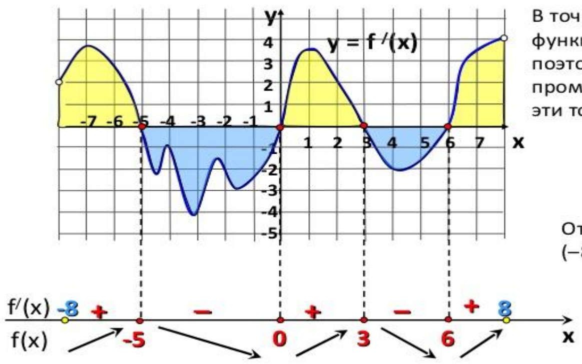


Ответ: 3.

Задание №5

Пример

Найдите промежутки возрастания функции y =f (x).



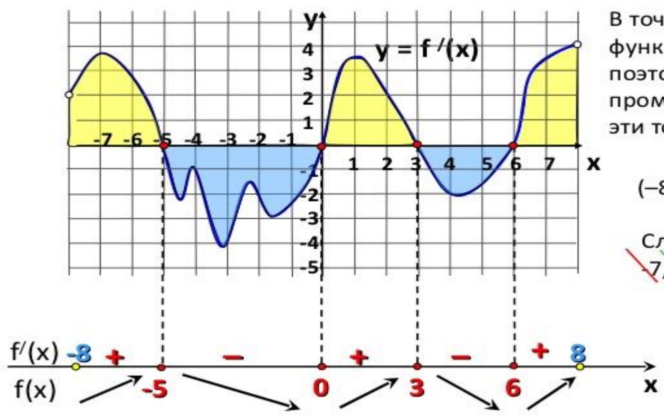
В точках –5, 0, 3 и 6 функция непрерывна, поэтому при записи промежутков возрастания эти точки включаем.

Ответ:
(–8; –5], [0; 3], [6; 8)

Задание №6

Пример

Найдите промежутки возрастания функции y =f (x). В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



В точках –5, 0, 3 и 6 функция непрерывна, поэтому при записи промежутков возрастания эти точки включаем.

(–8; –5], [0; 3], [6; 8)

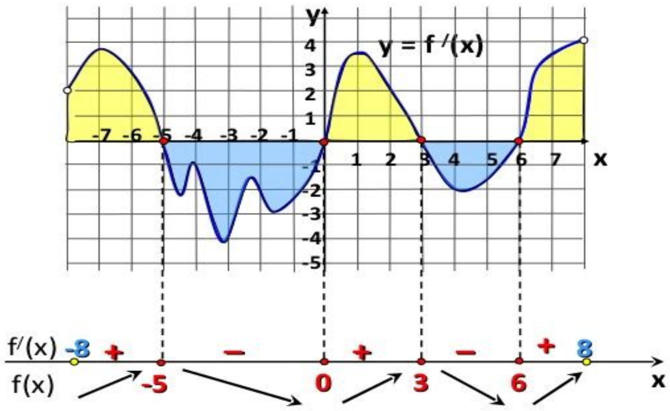
Сложим целые числа:
–7, –6, –5, 0, 1, 2, 3, 6, 7

Ответ: 1

Задание №7

Пример

Найдите промежутки убывания функции y =f (x). В ответе укажите длину наибольшего из них.

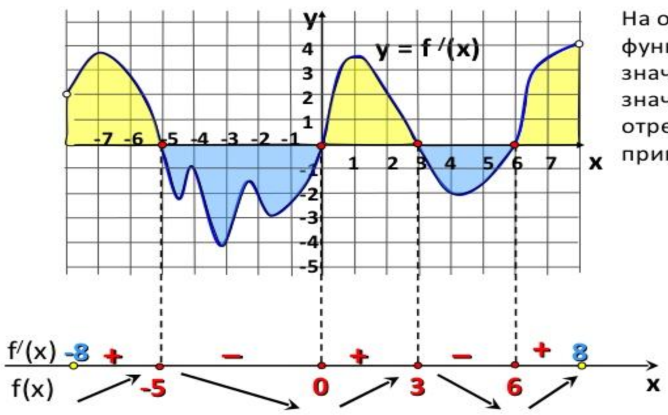


Ответ: 5.

Задание №8

Пример

В какой точке отрезка [– 4; –1] функции y =f (x) принимает наибольшее значение?



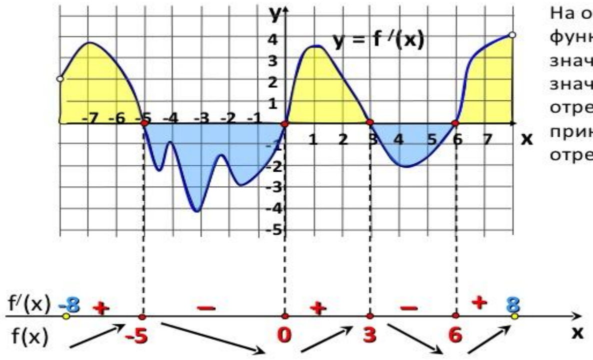
На отрезке [– 4; –1] функция y =f (x) убывает, значит, наибольшее значение на данном отрезке функция будет принимать в точке – 4.

Ответ: – 4.

Задание №9

Пример

В какой точке отрезка [– 4; –1] функции y =f (x) принимает наименьшее значение?



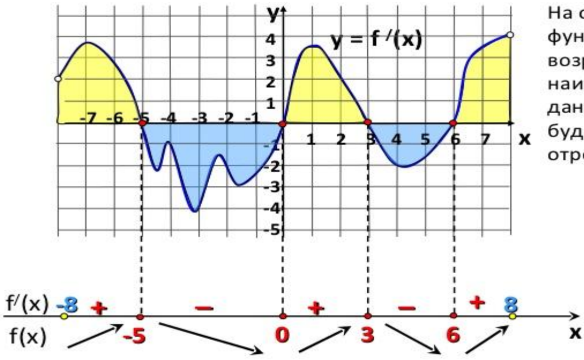
На отрезке [– 4; –1] функция y =f (x) убывает, значит, наименьшее значение на данном отрезке функция будет принимать в конце отрезка точке x= – 1.

Ответ: – 1.

Задание №10

Пример

В какой точке отрезка [0; 3] функции y =f (x) принимает наибольшее значение?



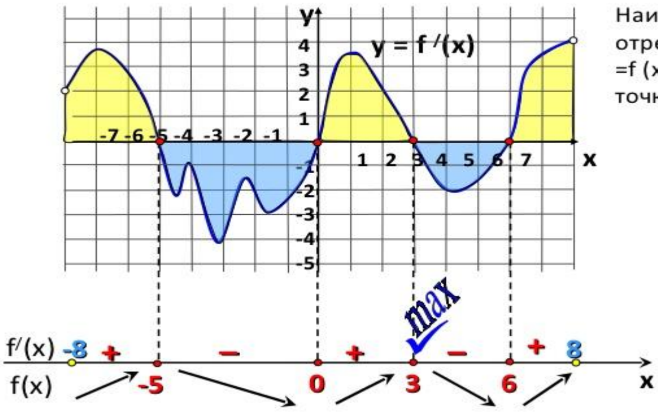
На отрезке [0; 3] функция y =f (x) возрастает, значит, наибольшее значение на данном отрезке функция будет принимать в конце отрезка точке x=3.

Ответ: 3.

Задание №11

Пример

В какой точке отрезка [1; 4] функции y =f (x) принимает наибольшее значение?

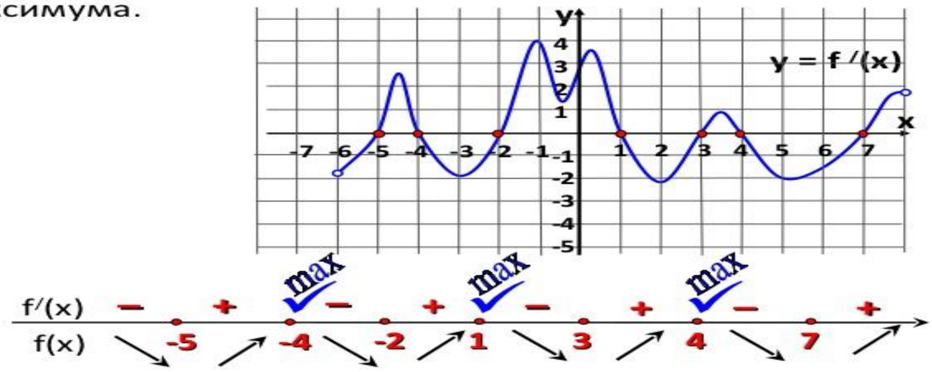


Наибольшее значение на отрезке [1; 4] функция y =f (x) будет принимать в точке максимума x=3.

Ответ: 3.

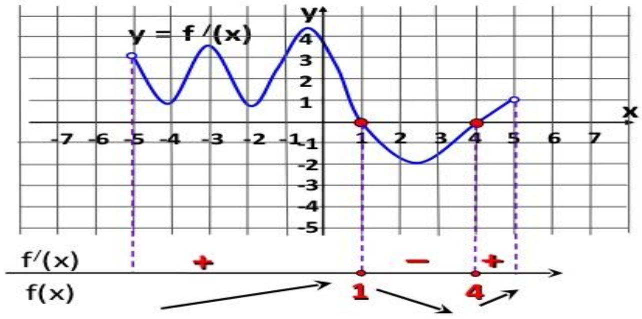
Задание №12

На рисунке изображен график производной функции y =f ′(x), заданной на промежутке (- 6; 8). Исследуйте функцию y =f (x) на экстремум и укажите количество ее точек максимума.



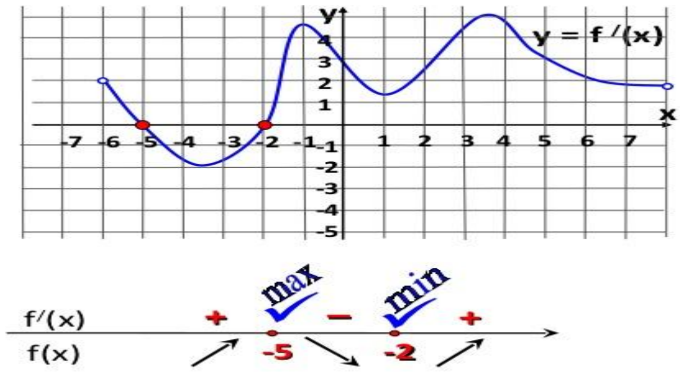
Задание №13

На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, заданной на промежутке (- 5; 5). Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и укажите число ее промежутков убывания.



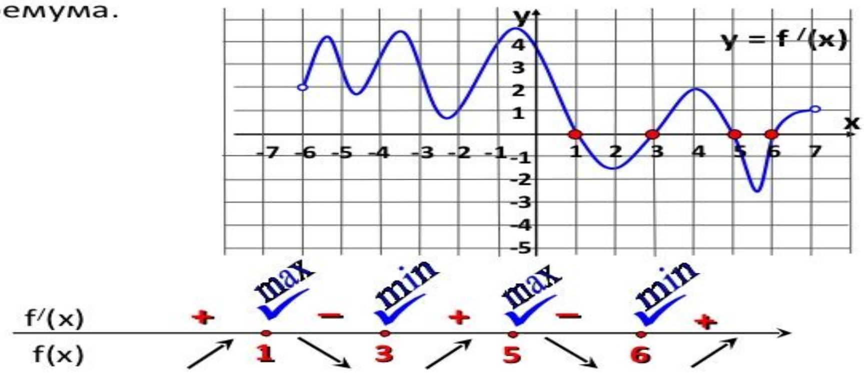
Задание №14

На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, заданной на промежутке (- 6; 8). Исследуйте функцию $y = f(x)$ на экстремум и укажите количество ее точек экстремума.



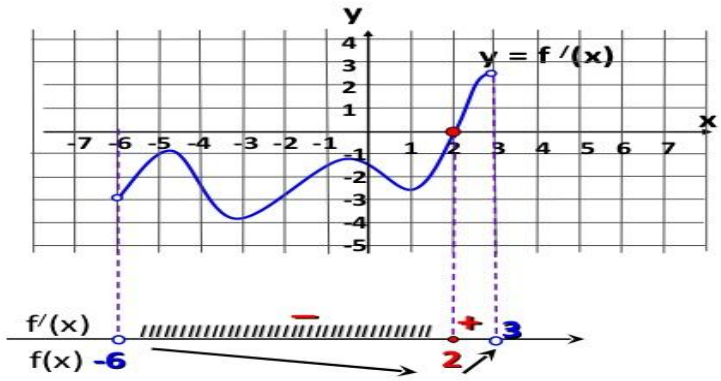
Задание №15

На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, заданной на промежутке (- 6; 7). Исследуйте функцию $y = f(x)$ на экстремум и укажите количество ее точек экстремума.



Задание №16

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 3)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите длину промежутка убывания этой функции.



Задание №17

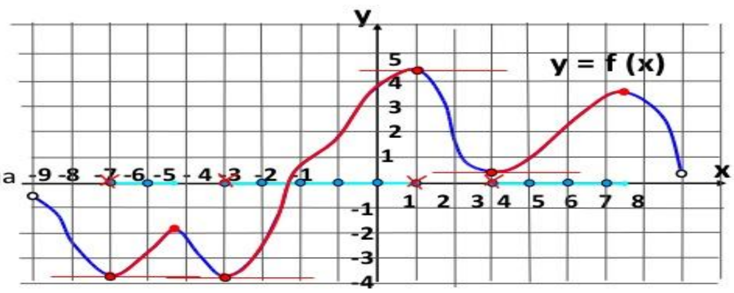
В8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-9; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Решение:

1). $f'(x) > 0$, значит, функция возрастает. Найдем эти участки графика.

2). Найдем все целые точки на этих отрезках.

3). Исключим точки, в которых производная равна 0 (в этих точках касательная параллельна оси Ох)



Ответ: 8.

Задание №18

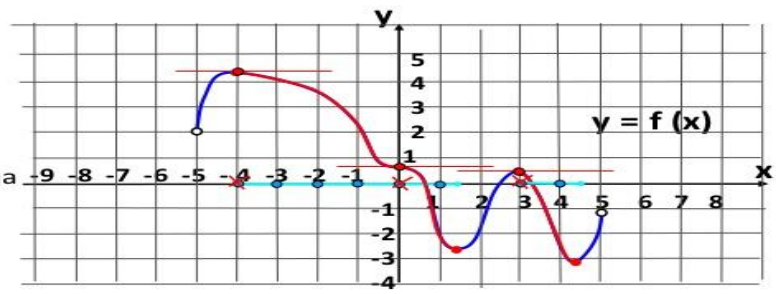
В8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

Решение:

1). $f'(x) < 0$, значит, функция убывает. Найдем эти участки графика.

2). Найдем все целые точки на этих отрезках.

3). Исключим точки, в которых производная равна 0 (в этих точках касательная параллельна оси Ох)
x=0 точка перегиба, в этой точке производная равна 0!



Ответ: 5.

Задание №19

B8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-6; 8). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

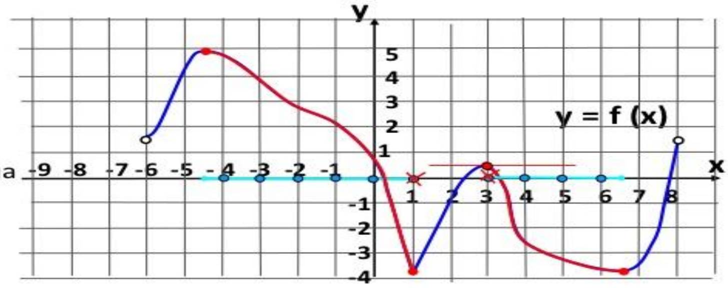
Решение:

1). $f'(x) < 0$, значит, функция убывает. Найдем эти участки графика.

2). Найдем все целые точки на этих отрезках.

3). Исключим точки, в которых производная равна 0 (в этих точках касательная параллельна оси Ох)

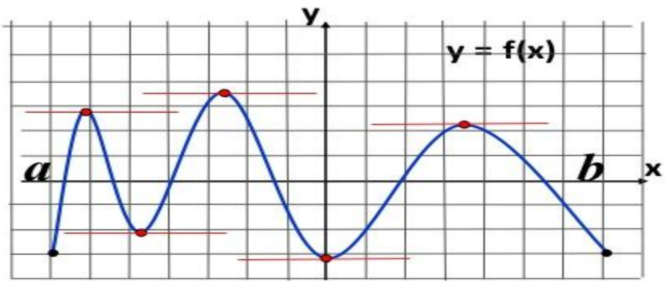
В точке x=1 производная не существует.



Ответ: 8.

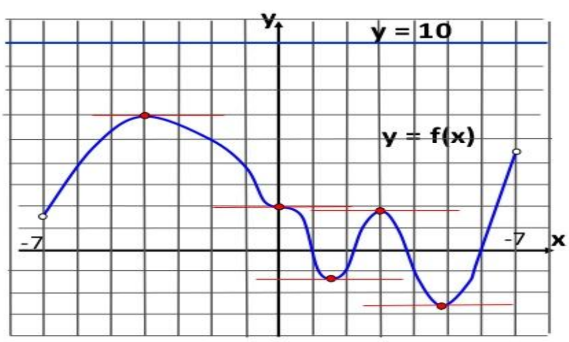
Задание №20

B8. Непрерывная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$
На рисунке изображен ее график. В ответе укажите количество точек графика этой функции, в которых касательная параллельна оси Ох.



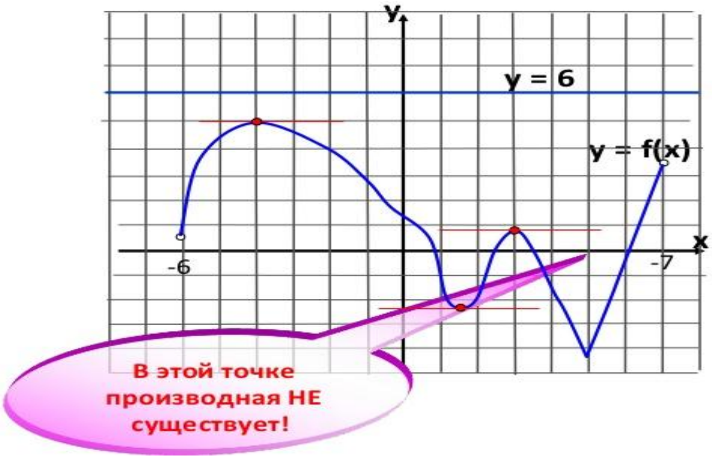
Задание №21

B8. Непрерывная функция $y = f(x)$ задана на интервале (-7; 7)
На рисунке изображен ее график. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 10$.



Задание №22

В8. Непрерывная функция y = f(x) задана на интервале (-6; 7). На рисунке изображен ее график. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y = 6.



Задание №23

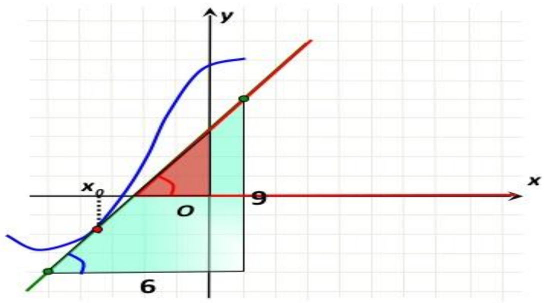
На рисунке изображен график функции y =f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.

Решение: 1). Угол, который составляет касательная с положительным направлением оси Ох, **острый**. Значит, значение производной в точке x_0 **положительно**.

2). Найдем тангенс этого угла. Для этого подберем треугольник с катетами-целыми числами. Этот треугольник не подходит.

Можно найти несколько удобных треугольников, например,….

3). Найдем тангенс угла – это отношение 9:6.



Ответ: 1,5

Задание №24

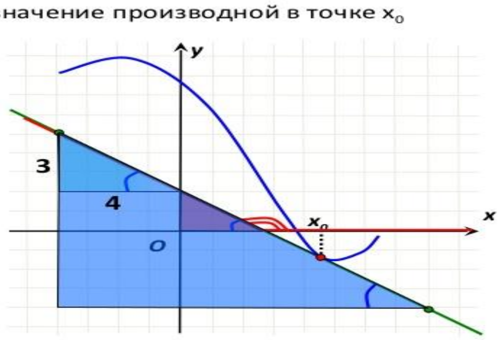
На рисунке изображен график функции y =f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.

Решение: 1). Угол, который составляет касательная с положительным направлением оси Ох, **тупой**. Значит, значение производной в точке x_0 **отрицательно**.

2). Найдем тангенс смежного угла. Для этого подберем треугольник с катетами-целыми числами. Этот треугольник не подходит.

Можно найти несколько удобных треугольников.

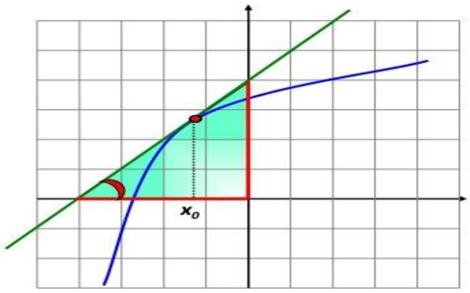
3). Найдем тангенс угла – это отношение 3:4.



Ответ: - 0,75

Задание №25

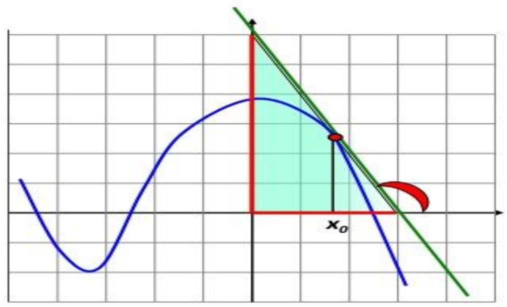
На рисунке изображен график функции y =f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



Геометрический смысл производной: **k = tg** $\boldsymbol{\alpha}$
Угол наклона касательной с осью Ох острый, значит ***k >o.***
Из прямоугольного треугольника
находим tgα = 4 : 4 =1

Задание №26

На рисунке изображен график функции y =f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



Геометрический смысл производной: **k = tg** $\boldsymbol{\alpha}$
Угол наклона касательной с осью Ох тупой, значит ***k < o.***
Из прямоугольного треугольника
находим tgα = 6 : 3 =2. Значит, *k= -2*

Задание №27

В. На рисунке изображен график производной функции y =f ′(x), заданной на промежутке [-5;5]. Исследуйте функцию y =f (x) на монотонность и укажите наибольшую точку максимума .