Муниципальное автономное образовательное учреждение
«Средняя образовательная школа № 37»
Ассоциация учителей математики Республики Бурятия
Байкальский образовательный центр «Эврика»

ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ В ЗАДАНИЯХ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

*Сборник
экономических задач и задач на оптимизацию
по математике*

Улан-Удэ
Издательство Бурятского госуниверситета
2017

УДК 371.275:51 (075.3)
ББК 74.202.812.24
П 691

Рецензент

Н. Н. Алексеева
канд. пед. наук, зав. кафедрой
«Развитие образовательных систем» ГАУ ДПО РБ БРИОП

Автор-составитель
Г.М. Конева
Учитель высшей категории, «Отличник просвещения РФ»,
Победитель Конкурса лучших учителей России.

П 691 **Практико-ориентированные задачи в заданиях ЕГЭ по математике:** сборник экономических задач и задач на оптимизацию по математике / сост. Г. М. Конева. – Улан-Удэ: Издательство Бурятского государственного университета, 2017. – 26 с.

Пособие ориентировано на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче ЕГЭ по математике профильного уровня. В данном учебном пособии представлен материал по решению практико-ориентированных задач, экономических задач которые были включены на ЕГЭ по математике профильного уровня с 2015 года. Задачи ориентированы на развитие у учащихся умений строить математические модели экономических ситуаций, исследовать эти модели, получать и интерпретировать выводы.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы и учителей математики.

УДК 371.275:51 (075.3)
ББК 74.202.812.24

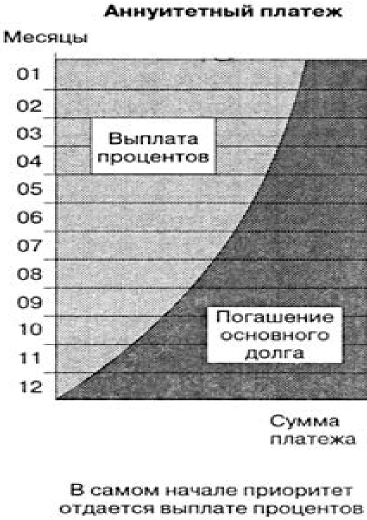
«Особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды».

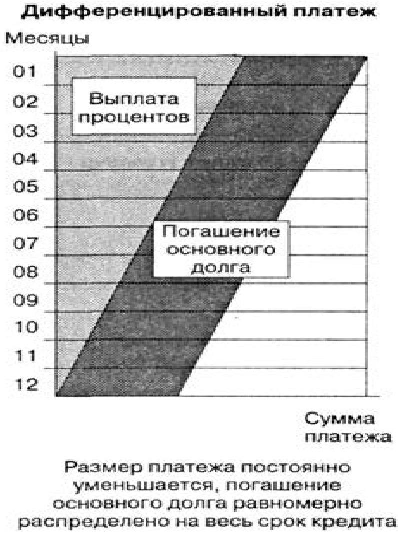
П. Л. Чебышев

ВСТУПЛЕНИЕ

Начиная с 2015 года, в заданиях ЕГЭ по математике профильного уровня появилась новая практико-ориентированная задача №17, так называемая «банковская» задача. В данных задачах учащимся предлагается ознакомиться с разными схемами выплаты кредита банку со стороны заемщика.

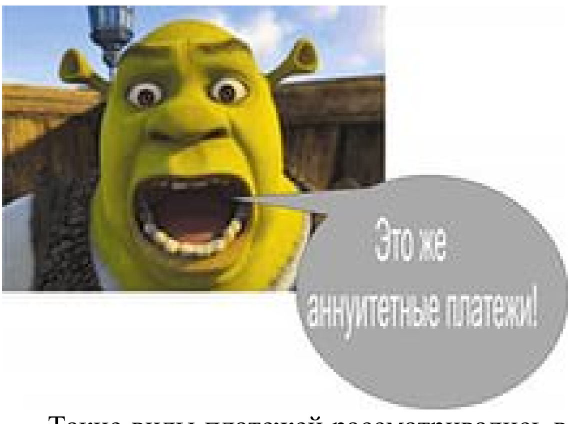
Кредит – это ссуда, предоставленная банком заемщику под определенные проценты за пользование деньгами. Как известно, существует два вида платежей по кредиту: дифференцированный и аннуитетный.





Дифференцированные платежи рассчитываются исходя из того, что сумма погашения основного долга из месяца в месяц одинакова, а сумма погашения процентов зависит от того, сколько насчитал банк за последний месяц.

При аннуитетных платежах размер ежемесячного платежа остается постоянным на всем периоде кредитования. Ежемесячный платеж рассчитывается как сумма процентов, начисленных на текущий период и суммы идущей на погашения суммы кредита.



Такие виды платежей рассматривались в КИМах по математике ЕГЭ 2015 года. Но кроме этих известных схем выплаты платежей по кредиту существуют и индивидуальные схемы расчета платежей по кредиту. Эти схемы представлены в задании №17 по математике профильного уровня ЕГЭ 2016 года. Кроме задач о кредитах учащимся предлагается в сборниках тренировочных вариантов познакомиться с задачами на выбор оптимального решения.

ЗАДАЧИ О КРЕДИТАХ

Задача 1

Рассмотрим задачу, которая раскрывает суть понятия «дифференцированный платеж» на простом примере. Допустим, что в банке взят кредит 1200 рублей на 12 месяцев. Причем, каждый платежный период долг сначала возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего платежного периода, а затем вносится оплата так, что долг становится на одну и ту же величину меньше долга на конец предыдущего платежного периода. Необходимо ответить на вопросы: Какую сумму нужно вернуть банку за весь платежный период? Какова сумма переплаты?

Рассуждаем. Долг перед банком по состоянию на конец года должен уменьшаться до нуля равномерно, то есть последовательность долгов перед банком такова:

1200;1100; 1000; 900;800; 700; 600; 500; 400; 300; 200;100.

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 10%. Тогда последовательность долгов будет такова:

$1200\cdot1.1$; $1100\cdot1.1$; $1000\cdot1.1$; $900\cdot1.1$; $800\cdot1.1$; $700\cdot1.1$; $600\cdot1.1$; $500\cdot1.1$; $400\cdot1.1$; $300\cdot1.1$; $200\cdot1.1$;$100\cdot1.1$. или 1320; 1210; 1100;990; 880; …110.

Обращаем внимание на то, разница между долговыми суммами равна 110 рублей. Теперь найдем ежемесячные выплаты:

1 месяц- 1320-1100=220

2 месяц- 1210-1000=210

3 месяц- 1100- 900=200

4 месяц- 990- 800=190

5 месяц – 880-700=180 и так далее. И последняя **наименьшая** выплата равна 110 рублей. Замечаем, что выплаты уменьшаются ежемесячно на 10 рублей.

Такова схема дифференцированного платежа. Далее можно найти сумму всех выплат. Она равна: 220+210+200+…+110 = 1980 (рублей). Таким образом, переплата составляет 65%.

Задача 2

15-го января 2015 года планируется взять кредит в банке на сумму 1.5 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования? Какова сумма переплаты?

Решение. Построим математическую модель этой задачи и исследуем ее. Пусть S- сумма кредита. Долг перед банком по состоянию на конец второго года должен уменьшаться до нуля равномерно. Тогда последовательность размеров долга будет иметь вид:

$\frac{24S}{24}$; $\frac{23S}{24}$; $\frac{22S}{24}$; …; $\frac{S}{24}$. Занесем эти данные в таблицу:

Месяц и год	15 января 2015 г	15 февраля 2015 г	15 марта 2015г	15 апреля 2015г	…	15 декабря 2016 года	15 января 2017 года
Долг перед банком	$\frac{24S}{24}$	$\frac{23S}{24}$	$\frac{22S}{24}$	$\frac{21S}{24}$	…	$\frac{S}{24}$	0

Найдем теперь размеры выплат:

1 месяц: $\frac{24\cdot S\cdot 1.03}{24}$ - $\frac{23S}{24}$ = $\frac{S}{24}$ (24·1.03 – 23).

2 месяц: $\frac{23S\cdot 1.03}{24}$ - $\frac{22S}{24}$ = $\frac{S}{24}$ (23·1.03 – 22).

3 месяц:: $\frac{22S\cdot 1.03}{24}$ - $\frac{21S}{24}$ = $\frac{S}{24}$ (22·1.03 – 21).

………………………………………………

24 месяц: $\frac{S\cdot 1.03}{24}$ - 0 = $\frac{S}{24}$(1·1.03 – 0).

Найдем сумму всех выплат:

$\frac{S}{24}$(24·1.03+23·1.03+22·1.03+…+1·1.03-23-22-21-…-1) =

= $\frac{S}{24}$ (1.03(24+23+22+…+1) –(23+22+21+…+1)) = $\frac{S}{24}$ (1.03·300–276) = $\frac{S}{24}$·33 = $\frac{11\cdot S}{8}$

Чтобы найти численное значение суммы всех выплат, надо подставить S=1,5. Получим, что сумма всех выплат равна 2,0625 миллионов рублей, или 2062500 рублей. Найдем сумму переплаты: 2062500-1500000=562500 (рублей).

Ответ: 2062500 рублей; 562500 рублей.

Задача 3

В июле планируется взять кредит 13 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы: каждый январь долг возрастет на 20% по сравнению с концом предыдущего года; в июле каждого года необходимо выплатить часть долга; в конце июля каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга по сравнению с концом предыдущего года. Чему равна общая сумма выплат после полного погашения кредита , если наименьший годовой платеж равен 1,56 млн рублей?

Решение.

Заметим, что наименьшая выплата в условиях дифференцированного платежа – последняя. Она равна $\frac{13}{n}$·1,2. Составим уравнение: $\frac{13}{n}$·1,2.= 1,56. Отсюда находим, что n = 10. Значит, кредит взят на 10 лет.

Найдем теперь размеры выплат:

1 год: $\frac{10\cdot 13\cdot 1.2}{10}$ - $\frac{9\cdot 13}{10}$ = $\frac{13}{10}$(1.2·10 – 9).

2 год: $\frac{9\cdot 13\cdot 1.2}{10}$ – $\frac{8\cdot 13}{10}$ = $\frac{13}{10}$(1.2·9 – 8).

…………….

10 год: $\frac{13}{10}(1.2\cdot 1-0)$.

Найдем сумму всех выплат: $\frac{13}{10}(1,2\cdot(10+9+\ldots+1)-(9+8+\ldots+1))=27,3$.

Значит, сумма всех выплат равна 27,3 млн рублей.

Задача 4

15-го января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы: 1-го числа каждого месяца долг возрастет на r% по сравнению с концом предыдущего месяца; со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 24% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение. Пусть S сумма кредита равна , a= 1+0,01r. Долг перед банком должен уменьшаться до нуля равномерно. Тогда последовательность размеров долга будет иметь вид:

$\frac{15S}{15}; \frac{14S}{15}; \frac{13S}{15};\ldots \frac{S}{15}$.

Найдем выплаты:

1 месяц: $\frac{15S\cdot a}{15}-\frac{14S}{15}=\frac{S}{15}(15\cdot a-14)$.

2 месяц: $\frac{14S\cdot a}{15}-\frac{13S}{15}=\frac{S}{15}(14\cdot a-13)$.

……………………………………………

15 месяц: $\frac{S\cdot a}{15}$

Найдем сумму всех выплат:

$\frac{S}{15}(a(15+14+13+\ldots+1)-(14+13+12+\ldots+1))=\frac{S}{15}(a\cdot 120-105)=S(8a-7)$.

По условию общая сумма выплат после полного погашения кредита на 24% больше суммы, взятой в кредит. Значит, S(8a -7) =1,24 S. Решая это уравнение, находим a=1,03. Так как a= 1+0,01r, то r = 3%.

Ответ: 3%

Рассмотрим задачу, которая раскрывает суть понятия «**аннуитетный** платеж».

В общем виде задача формулируется так: 31 декабря 2014 года Андрей взял в банке **S** рублей в кредит под **a** процентов годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего года банк начисляет **a** процентов на оставшуюся сумму долга. Затем Андрей переводит в банк сумму **X** ежегодного платежа (транш). Весь долг Андрей должен выплатить за **n** лет, то есть за **n** равных платежей. Необходимо найти одну из неизвестных величин: **S, a, X, или n.**

Решим одну из таких задач.

Задача 5. Нахождение количества лет выплаты кредита

Максим хочет взять в банке кредит 1,5 миллиона рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными платежами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?

Решение.

1) В конце первого года долг составит:

$$1500000 \cdot 1{,}1 - 350000 = 1300000 \text{ (р.)}$$

2) В конце второго года долг составит:

$$1300000 \cdot 1{,}1 - 350000 = 1080000 \text{ (р.)}$$

2) В конце третьего года долг составит:

$$1080000 \cdot 1{,}1 - 350000 = 838000 \text{ (р.)}$$

4)В конце четвертого года долг составит:

$$838000 \cdot 1{,}1 - 350000 = 571800 \text{ (р.)}$$

5)В конце пятого года долг составит:

$$571800 \cdot 1{,}1 - 350000 = 278980 \text{ (р.)}$$

6) В конце шестого года долг составит:

$$278900 \cdot 1{,}1 = 306878 \text{ (р.)}$$

Эта сумма менее 350000 руб. Значит, кредит будет погашен за 6 лет.

Ответ: 6 лет

Задача 6. Вычисление процентной ставки по кредиту.

31 декабря 2014 года Валерий взял в банке 1000000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая. 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся

сумму долга, затем Валерий переводит в банк очередной транш. Валерий выплатил кредит за два транша, то есть за два года. В первый раз Валерий перевел в банк 660000 рублей, во второй раз – 484000 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Валерию?

Решение. Пусть a - процентная ставка по кредиту.

1)В конце первого года долг составит:

$$1000000 \cdot (1 + 0{,}01 \cdot a) - 660000 = 340000 + 10000 \cdot a$$

2) В конце второго года долг составит:

$$(340000 + 10000 \cdot a) \cdot (1 + 0{,}01 \cdot a) - 484000.$$

По условию задачи кредит будет погашен за два года. Составляем уравнение: $(340000 + 10000 \cdot a) \cdot (1 + 0{,}01 \cdot a) - 484000 = 0$;

$$a^2 + 134 \cdot a - 1440 = 0$$

Решая уравнение, получаем, что $a = 10$.

Ответ: 10%

Задача 7. Нахождение суммы кредита

31 декабря 2014 года Максим взял в банке некоторую сумму денег в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Михаил переводит в банк 2928200 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами, то есть за 4 года?

Решение. Пусть S – сумма кредита.

1)В конце первого года долг составит: $(1{,}1x - 2928200)$ рублей

2) В конце второго года долг (в рублях) составит:

$(1{,}1x - 2928200) \cdot 1{,}1 - 2928200 = 1{,}21x - 3221020 - 2928200 = 1{,}21x - 6149220$

3) В конце третьего года долг (в рублях) составит:

$(1{,}21x - 6149220) \cdot 1{,}1 - 2928200 = 1{,}331x - 6764142 - 2928200 =$

$= 1{,}331x - 9692342$

4) В конце четвертого года долг (в рублях) составит 2928200 рублей:

$(1{,}331x - 9692342) \cdot 1{,}1 = 2928200$;

$1{,}4641x - 10661576 = 2928200$;

$1{,}4641x = 13589776$;

$x = 9281999{,}8$.

Значит, сумма кредита равна 9282000 рублей.

Ответ: 9282000 рублей.

Задача 8. Нахождение ежегодного транша

31 декабря 2014 года Роман взял в банке 8599000 рублей в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга(то есть увеличивает долг на 14%), затем Роман переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Роман выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

Решение.

1)В конце первого года долг составит:

$$8599000 \cdot 1{,}14 - X = 9802860 - X$$

2) В конце второго года долг составит:

$$(9802860 - X) \cdot 1{,}14 - X = 11175260 - 2{,}14 \cdot X$$

3) В конце третьего года долг (в рублях) составит:

$$(11175260 - 2{,}14 \cdot X) \cdot 1{,}14 - X = 12739796 - 3{,}4396 \cdot X.$$

Составим уравнение:

$12739796 - 3{,}4396 \cdot X = 0$

$X = 3703860$ рублей

Ответ: ежегодный транш составит 3703860 рублей.

Задача 9 (основная волна, 06.06.16, вариант 446)

В июле 2016 года планируется взять кредит на 4 года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга

- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц, год	**Июль 2016**	**Июль 2017**	**Июль 2018**	**Июль 2019**	**Июль 2020**
долг	**S**	**0.9S**	**0.7S**	**0.4S**	**0**

Найдите наименьшее S, при котором общая сумма выплат будет больше 20 млн рублей.

Решение.

Долг перед банком (в млн рублей) должен уменьшаться до нуля на июль каждого года в соответствии с данной таблицей:

S; 0.9S; 0.7S; 0.4S; 0.

По условию, в январе каждого года долг увеличивается на 30%. Значит, долг в январе каждого года равен:

Месяц, год	Январь 2017	Январь 2018	Январь 2019	Январь 2020	Январь 2021
Долг	1.3S	$1.3\cdot0.9\cdot S=1.17S$	$1.3\cdot0.7\cdot S=0.91S$	$1.3\cdot0.4\cdot S=0.52S$	0

Найдем теперь выплаты с февраля по июнь каждого года:

1) $1.3\cdot S - 0.9\cdot S = 0.4\cdot S$.

2) $1.17\cdot S - 0.7\cdot S = 0.47\cdot S$

3) $0.91\cdot S - 0.4S = 0.51\cdot S$

4) $0.52\cdot S - 0 = 0.52\cdot S$

Найдем сумму всех выплат: $0.4\cdot S+0.47\cdot S+0.51\cdot S+0.52\cdot S=1.9\cdot S$

Общая сумма выплат должна быть больше 20 млн рублей:

$1.9\cdot S > 20$; $S > 10\frac{10}{19}$

Наименьшее целое решение этого неравенства – число 11. Значит, искомый размер кредита – 11 млн рублей. Ответ: 11 млн рублей

Задача 10 (основная волна, 06.06.16)

15-го января планируется взять кредит в банке на четыре месяца в размере 2 млн руб. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Дата	**15.01**	**15.02**	**15.03**	**15.04**	**15.05**
Долг (в млн р.)	**2**	**1.6**	**1**	**0.5**	**0**

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 2,5 млн р.

Решение.

Долг перед банком (в млн рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

2; 1.6; 1; 0.5; 0.

Обозначим $k = 1+\frac{r}{100}$. Тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

2k; 1.6 k; 1k; 0.5k; 0.

Найдем теперь выплаты со 2-е по 14-е число каждого месяца:

2k-1.6; 1.6k-1; k-0.5; 0.5k.

Общая сумма выплат составляет:

$(2k-1.6) +(1.6k-1) + (k-0.5) + 0.5k = 5.1k – 3.1$

По условию, общая сумма выплат будет меньше 2.5 млн руб. Значит, составляем неравенство:

$5.1k – 3.1\leq 2.5$.Подставляя вместо k выражение $1+\frac{r}{100}$ и решая неравенство, получим, что $r \leq 9\frac{41}{51}$. Наибольшее целое решение этого неравенства – число 9. Значит, искомое число процентов - 9%.

Ответ: 9%

Задача 11 (основная волна, 06.06.16)

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на 5 лет в размере S тысяч рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается неизменно равным S тысяч рублей;

- выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс рублей;

- к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за 5 лет.

Решение.

Так как в июле 2017, 2018, и 2019 годов долг перед банком не меняется, то ежегодные выплаты равны по 0,2S тысяч рублей.

В январе 2020 года долг равен 1,2S, а в июле – (1,2S – 360) тысяч рублей.

В январе 2021 года долг равен 1,2(1,2S – 360) = 1,44S – 432;

а в июле – (1,44S – 792).

Так как к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью, то составим уравнение:

1,44S – 792 = 0; S = 550.

Найдем первые три выплаты: $0{,}2 \cdot 550 = 110$ (тыс руб).

Общая сумма выплат составляет: $3 \cdot 110 + 2 \cdot 360 = 1050$ (тыс руб)

Ответ: 1050 тысяч рублей

Задача 12 (из тренировочных работ СТАТГРАД, апрель 2016)

Планируется выдать льготный кредит (целое число млн р.) на 5 лет. В середине каждого года долг заемщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце первого, второго и третьего годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заемщик выплачивает одинаковые суммы, погашая долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат превысит 10 млн р.?

Решение.

Пусть S – сумма кредита, X – сумма выплат в конце 4-го и 5-го годов. В конце первого, второго и третьего годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту. Значит, ежегодные выплаты равны по $0{,}2 \cdot S$ тысяч рублей. А выплаты за три первых года равны $3 \cdot 0{,}2S = 0{,}6 \cdot S$. Выплаты за 5 лет равны $(0{,}6 \cdot S + 2 \cdot X)$. По условию задачи составляем неравенство: $0{,}6 \cdot S + 2 \cdot X \geq 10$ (1).

Рассуждаем далее. В начале 4 года долг составит $1{,}2 \cdot S$. После выплаты в конце 4 года долг составит

$(1{,}2 \cdot S - X)$. В начале 5-го года долг составит $(1{,}2 \cdot S - X) \cdot 1{,}2$, а после выплаты долг станет равным нулю, то есть $(1{,}2 \cdot S - X) \cdot 1{,}2 - X = 0$.

Выразим из этого уравнения $X = \frac{36 \cdot S}{55}$ и подставим в неравенство (1):

$0{,}6 \cdot S + 2 \cdot \frac{36 \cdot S}{55} \geq 10;$

$S \geq 5\frac{5}{21}.$

Наименьшее целое решение этого неравенства – число 6. Значит, наименьший размер кредита равен 6 млн рублей.

Ответ: 6 млн р.

Задача 13 (досрочное ЕГЭ, 16.04.16)

В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;

- в июле 2017,2018,2019 годов долг остается равным 4,2 млн рубле

- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если долг выплачен полностью и общие выплаты равны 6,1 млн рублей.

Решение.

Сумма выплат за первые три года равна:

$4{,}2\cdot 0{,}01\cdot r\cdot 3 = 0{,}126\cdot r$

Сумма выплат за последние два года равна $2\cdot X$.

Так как общие выплаты равны 6,1 млн рублей, то составляем уравнение:

$0{,}126\cdot r + 2X = 6{,}1$ (1).

В январе 2020 года долг составит: $4{,}2 + 4{,}2\cdot 0{,}01r = 4{,}2\,(1+0{,}01r)$. После выплаты суммы X долг станет равным:

$4{,}2\,(1+0{,}01r) - X = 4{,}2t - X$, где $t = 1 + 0{,}01r$.

В январе 2021 года долг составит $(4{,}2t - X)\cdot t$

После выплаты суммы X долг станет равным нулю:

$(4{,}2t - X)\cdot t - X = 0$ (2).

Из уравнения (2) выразим X:

$X = \frac{4{,}2\cdot t^2}{1+t}$ и подставим в равенство (1):

$12{,}6\cdot(t-1) + 2\cdot\frac{4{,}2\cdot t^2}{1+t} = 6{,}1;$

$t = 1{,}1$. Значит, $r = 10\%$

Ответ: 10%

Задача 14

Алексей приобрел ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей

должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?

Решение.

Продать ценную бумагу нужно в том момент, когда 10% от стоимости станут составлять не меньше 2 тыс. рублей, что возможно при стоимости бумаги не менее 20 тыс. рублей. Это произойдет через семь лет после покупки ценной бумаги, когда ее стоимость будет равна 21 тыс рублей. И в этот момент 10% от стоимости этой бумаги будут равны 2100 рублей, то есть больше, чем 2000 р. Значит, надо продать бумагу, а вырученные деньги положить на счет в банке.

Таким образом, ценную бумагу нужно продать в течение восьмого года.

Ответ: В течение 8 года

Задача 15

Производство x тыс. единиц продукции обходится в q = $0{,}5x^2$ + x + 7 млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет (px – q). При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн рублей?

Решение. Прибыль (в млн рублей) за один год выражается величиной

$$px - (0{,}5x^2 + x + 7) = -0{,}5x^2 + (p-1)x - 7$$

Это выражение является квадратным трехчленом, оно достигает своего наибольшего значения $\frac{(p-1)^2}{2} - 7$ при x = p-1. Прибыль за три года составит не менее 75 млн рублей, если $\frac{(p-1)^2}{2} - 7 \geq 25$. Решая это неравенство, получим, что $p \geq 9$ и $p \leq -7$. Так как цена продукции не может быть отрицательной, то $p \geq 9$. Таким образом, искомая наименьшая цена составляет 9 тыс. р.

Ответ: 9 тыс. рублей.

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Задача 1

В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение: 1-й способ – с помощью составления опорной линейной функции.

Ознакомимся с решением экстремальных задач по теме «Линейная функция». Решение этих задач сводится к нахождению экстремума линейной функции

$y = кx + в$, где $к$ и $в$ – постоянные. Если эту функцию рассматривать на отрезке

$[\alpha; \beta]$, то она будет иметь на нем наибольшее и наименьшее значение. При $к > 0$ наименьшее значение у принимает в точке $x = \alpha$, а наибольшее – в точке $x = \beta$, при $к < 0$ функция у в точке $x = \alpha$ принимает наибольшее значение, а в точке $x = \beta$ - наименьшее. Решим задачу.

Пусть х рабочих в 1 шахте добывают алюминий ежедневно, тогда (100-х) рабочих добывают никель. Тогда количество добытого алюминия равно (5х) кг, количество добытого никеля – 15(100-х) кг.

Пусть у рабочих во 2 шахте добывают алюминий ежедневно, (300-у) рабочих добывают никель. Тогда количество добытого алюминия равно (15у) кг, количество добытого никеля – 5(300-у) кг.

Всего количество добытого алюминия (5х+15у);а количество добытого никеля - 15(100-х)+ 5(300-у)=1500-15х+1500-5у=3000-15х-5у.

Функция сплава: $F(x) = (5x+15y) + (3000-15x-5y)$; $F(x) = -10x+10y + 3000$;

Учтем условие, при котором производится сплав алюминия и никеля: 2 кг алюминия и 1 кг никеля. Тогда $5x+15y=2(3000-15x-5y)$. Отсюда $y = -1{,}4x+600$. Поставим это выражение в функцию сплава: $F(x) = -10x+10(-1{,}4x+600) + 3000$;

$F(x) = -24x +5400$. Эта линейная функция является убывающей. Наибольшее значение она принимает при $x=0$. Значит, $F(100)=5400$.

Ответ:5400

2-й способ – с помощью логических рассуждений и составления уравнения.

Так как в 1 шахте добывают больше никеля, то для наибольшей выгоды логично допустить, чтобы все рабочие в этой шахте добывали никель. Тогда в 1 шахте будет добыто 1500 кг никеля. Во 2 шахте больше добывают алюминия. Пусть все 300 рабочих добывают алюминий. Тогда алюминия будет добыто 4500 кг. Для сплава нужно алюминия в 2 раза больше, чем никеля. Значит, на 1500 кг никеля нужно 3000 кг алюминия. А у нас алюминия больше. Рассуждаем дальше. Значит, рабочих 2-й шахты нужно перераспределить на добычу не только алюминия, но и на добычу никеля с учетом пропорции сплава. Пусть x рабочих 2 шахты добывают алюминий, тогда (300-x) рабочих добывают никель. Составим уравнение: $5 \cdot 3 \cdot x =2 \cdot (5 \cdot (300-x) + 1500)$; $15x = 6000-10x$; $x = 240$.

Найдем y: $y=300-240=60$.Значит, 240 рабочих 2-й шахты должны добывать алюминий, 60 рабочих добывать никель. Тогда алюминия будет добыто

$240 \cdot 5 \cdot 3 = 3600$ (кг), никеля $1500 + 60 \cdot 5=1800$(кг). Всего $3600+1800=5400$ (кг). Ответ: 5400 кг

3-й способ – методом перебора. Так как в 1 шахте добывают больше никеля, то пусть все рабочие добывают никель. Тогда в 1 шахте будет добыто 1500 кг никеля. Во 2 шахте больше добывают алюминия. Пусть все 300 рабочих добывают алюминий. Тогда алюминия будет добыто 4500 кг. Для сплава нужно алюминия в 2 раза больше, чем никеля. Значит, на 1500 кг никеля нужно 3000 кг алюминия. А у нас алюминия больше. Что делать? Значит, рабочих 2 шахты нужно перераспределить на добычу не только алюминия, но и на добычу никеля. Применим метод перебора.

Допустим, что 10 рабочих 2 шахты добывают никель, а 290 рабочих – алюминий. Тогда алюминия будет добыто всего 290·5·3= 4350 (кг), а никеля – 1500 + 10·5= 1550 (кг). Замечаем, что данные не удовлетворяют пропорции 1: 2. Значит, необходимо увеличить количество рабочих, добывающих никель. Допустим, что 20 рабочих 2 шахты добывают никель, а 280 рабочих – алюминий. Тогда алюминия будет добыто всего 280·5·3= 4200 (кг), а никеля – 1500 + 20·5= 1600 (кг). Замечаем, что данные не удовлетворяют пропорции 1: 2. Значит, необходимо опять увеличить количество рабочих, добывающих никель. Допустим, что 40 рабочих 2 шахты добывают никель, а 260 рабочих – алюминий. Тогда алюминия будет добыто всего 260·5·3= 3900 (кг), а никеля – 1500 + 40·5= 1700 (кг). Замечаем, что данные не удовлетворяют пропорции 1: 2. Значит, необходимо опять увеличить количество рабочих, добывающих никель. Допустим, что 60 рабочих 2 шахты добывают никель, а 240 рабочих – алюминий. Тогда алюминия будет добыто всего 240·5·3= 3600 (кг), а никеля – 1500 + 60·5= 1800 (кг). Замечаем, что данные удовлетворяют пропорции 1: 2, то есть на 1 часть никеля приходится 2 части алюминия: 1800: 3600. Итак, всего будет добыто 3600+1800=5400 (кг) алюминия и никеля. А количество изделий из сплава тогда будет равно 1800 штук.

Ответ: 5400 кг.

Задача 2

Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратный метр и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

Решение:

1-й способ – с помощью логики и арифметических действий.

Найдем стоимость 1$м^2$ номера стандартного: 2000:21=$95\frac{2}{7}$ (рублей).

Найдем стоимость 1$м^2$ номера «люкс»: 4500: 49 =$91\frac{41}{49}$ (рублей).

Так как стоимость 1$м^2$ стандартного номера дороже, то выгоднее разместить на этой площади больше номеров стандартных, и как можно меньше номеров «люкс». Начнем перебор количества номеров «люкс» с наименьшей цифры. Пусть номеров «люкс» будет 0. Тогда число 1099 не делится нацело на 21. Далее. Допустим, что номеров «люкс» будет 1. Тогда: 1099- 49=1050$(м^2)$;

1050: 21 = 50 (номеров стандартных). Значит, на площади 1050$(м^2)$можно разместить 50 стандартных номеров. Тогда в сутки отель может заработать: 50· 2000 + 1· 4500=104500 (р.). Ответ: 104500 рублей.

2-й способ – с помощью составления опорной линейной функции.

Пусть x – количество стандартных номеров, y- количество номеров «люкс». Они занимают площадь 21x+49y. Составим равенство: 21x+49y = 1099. Выразим из этого равенства y = $\frac{-21x+1099}{49}$.

Составим функцию заработанных денег: S(x, y) =2000·x + 4500·y. Далее подставим в эту функцию выражение для y. Получим S(x) =71 $\frac{3}{7}$ ·x + 4500·$22\frac{3}{7}$. Это возрастающая линейная функция. Свое наибольшее значение она принимает при наибольшем значении x и наименьшем значении y. По условию x и y – натуральные числа. Значит, y=1 (это наименьшее натуральное число) и x=50. Значит, S (50, 1) = 2000·50 + 4500· 1=104500.

Ответ: 104500 рублей.

Задача 3

На каждом из двух комбинатов работают по 100 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 3 детали A или 1 деталь B.На втором комбинате для изготовления t деталей (и A, и B) требуется t^2 человеко-смен. Оба эти комбината поставляют детали на комбинат , из которых собирают изделие , для изготовления которого нужна 1 деталь A и 3 детали B. При этом комбинаты договариваются изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изде-

лий. Сколько изделий может собрать комбинат при таких условиях?

Решение. Пусть на первом комбинате x человек изготавливают деталь А, по 3 штуки за смену. Значит, всего 3x деталей А. Тогда (100 –x) человек изготавливают деталь В, по 1 штуке за смену. Всего (100-x) деталей В.

Пусть на втором комбинате изготавливают a деталей А и b деталей В. Тогда на изготовление деталей А требуется a^2 человеко-смен, а для изготовления детали В b^2 человеко-смен. По условию $a^2 + b^2 = 100$, так как в одну смену трудятся все 100 рабочих второго комбината. Сведем все данные в таблицу:

Комбинат	Количество деталей А	Количество деталей В
1-й комбинат	3x	100-x
2-й комбинат	a	b
Всего	3x +a	100 – x +b

Чтобы собрать наибольшее количество изделий, нужно соблюдать условие:

1 деталь А и 3 детали В. В противном случае лишние детали будут залеживаться, из них нельзя будет собрать изделие, пока не будет готова другая деталь. Значит, $3(3x + a) = 100 - x + b$; $10x = 100 + b - 3a$. (1)

В каждом изделии содержится 1 деталь А и 3 детали В. Значит, общее количество изделий равно числу изделий А.

Так как a и b – целые числа и $a^2 + b^2 = 100$, то возможны следующие случаи:

1) a=0, b=10. Тогда из равенства (1) x=11 и $3x + a = 3 \cdot 11 + 0 = 33$.
2) a=10, b=0. Тогда из равенства (1) x=7 и $3x + a = 3 \cdot 7 + 10 = 31$.
3) a=6, b=8. Тогда x=9 и 3x +a=33.
4) a=8, b=6. Тогда x=8,2 – не является целым числом.

Значит, наибольшее количество изделий равно 33. Ответ: 33

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Большую часть своих усилий человек тратит на поиск наилучшего, т.е. оптимального решения поставленной задачи. Задачи подобного рода носят общее название – экономические задачи на оптимизацию или экстремальные задачи. Эти задачи тесно связаны с практической деятельностью человека. Как добиваться наиболее высокого жизненного уровня, наивысшей производительности труда, наименьших потерь, максимальной прибыли, минимальной затраты времени – так ставятся вопросы, над которыми приходится думать каждому члену общества. Экстремальные задачи с достаточной полнотой закладывают в сознание учащихся понимание того, как человек ищет, постоянно добивается решения жизненных задач, чтобы получающиеся результаты его деятельности были как можно лучшими. Решая задачи указанного типа, учащиеся видят, с одной стороны, абстрактный характер математических понятий, с другой – большую и эффективную их применимость к решению практических, жизненных задач. Такая постановка экстремальных задач способствует расширению сферы приложений учебного материала, повышает роль этих задач в осуществлении глубокой цели математического образования школьников – обучать приложению математики в различных областях человеческой деятельности. Экстремальные задачи помогают школьнику ознакомиться с некоторыми идеями и прикладными методами курса математики, которые часто применяются в трудовой деятельности, в познании окружающей действительности. Решение экстремальных задач способствует углублению и обогащению математических знаний учащихся. Через задачи они знакомятся с экстремальными свойствами изучаемых функций.

Решение задач о кредитах в настоящее время очень актуально, так как жизнь современного человека тесно связана с экономическими отношениями, в частности, с операциями в банке.

Рецензия
на сборник экономических задач и задач на оптимизацию
по математике для учащихся 10-11 классов
**«Практико-ориентированные задачи в заданиях ЕГЭ
по математике»** учителя математики МАОУ СОШ № 37
Коневой Галины Михайловны

В настоящее время общее образование находится на этапе модернизации и обновления системы и содержания в условиях введения новых федеральных государственных стандартов. Приоритетом общества и системы образования является способность вступающих в жизнь людей самостоятельно решать встающие перед ними новые, еще неизвестные задачи. На первый план наряду с общей грамотностью выступает умение выпускников, например, разрабатывать и проверять гипотезы, умение работать в проектном режиме, проявлять инициативу в принятии решений. Это и становится одним из значимых ожидаемых результатов образования и предметом стандартизации.

Практико-ориентированные задачи тесно связаны с практической деятельностью человека. Решение и анализ таких задач способствует формированию навыков и умений у выпускников самостоятельно решать жизненные задачи.

Данная работа содержит 18 задач, собранных и решенных учителем математики МАОУ СОШ №37 города Улан-Удэ Коневой Г.М. Брошюра состоит из четырех частей:

1) Вступление
2) Задачи о кредитах
3) Экономические задачи на оптимизацию
4) Заключение.

Данные задачи были включены на ЕГЭ по математике профильного уровня с 2015 года. Задачи ориентированы на развитие у учащихся умений строить математические модели экономических ситуаций, исследовать эти модели, получать и интерпретировать выводы.

Сборник задач может быть использован учащимися и учителями при подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня.

Н. Н. Алексеева
канд. пед. наук, зав. кафедрой
«Развитие образовательных систем» ГАУ ДПО РБ БРИОП

Аннотация
на учебное пособие «Практико-ориентированные задачи
в заданиях ЕГЭ по математике» учителя МАОУ СОШ № 37 г. Улан-Удэ
Коневой Галины Михайловны.

"Книги - это корабли мысли,
странствующие по волнам времени
и бережно несущие свой драгоценный груз
от поколения к поколению"
Френсис Бэкон

В данном учебном пособии представлен материал по решению экономических задач и задач на выбор оптимального решения. Эти задачи были включены на ЕГЭ по математике профильного уровня с 2015 года. Задачи ориентированы на развитие у учащихся умений строить математические модели экономических ситуаций, исследовать эти модели, получать и интерпретировать выводы.

Главное внимание в статье уделено решению задач о кредитах. Именно такие задачи были включены на ЕГЭ в 2015 и 2016 году. Кроме этих задач, учитель предлагает рассмотреть и задачи на выбор оптимального решения. Неоценимую важность таких экстремальных задач в школьном курсе математики я вижу в воспитании исследовательской культуры учащихся. Ведь все решения таких задач предлагаются на уровне исследования математической модели и на уровне исследования реальной ситуации с использованием оптимизационных средств. Экстремальные задачи помогают школьнику ознакомиться с некоторыми идеями и прикладными методами школьного курса математики, которые часто применяются в трудовой деятельности, в познании окружающей действительности. Решение экстремальных задач способствует углублению и обогащению математических знаний учащихся.

В данной работе учитель рассмотрел такие экстремальные задачи, которые решаются средствами элементарной математики: с помощью линейной функции, с помощью методов перебора и логических рассуждений, с помощью составления уравнения.

Данный сборник задач – это результат плодотворной работы в рядах РОО БОЦ «Эврика» на курсах усовершенствования учителей при ГАУ ДПО РБ БРИОП. Учебное пособие создано с целью оказания помощи учителям и учащимся при подготовке к ЕГЭ по математике.

К. Т. Латкина
президент Ассоциации учителей математики РБ
«Байкальский образовательный центр «Эврика»,
«Заслуженный учитель России», «Отличник просвещения РФ»,
победитель Конкурса лучших учителей России

Содержание

Учебное издание

ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ В ЗАДАНИЯХ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Сборник
экономических задач и задач на оптимизацию
по математике

Составитель
Галина Михайловна Конева

Св-во о государственной аккредитации
№ 1289 от 23 декабря 2011 г.

Подписано в печать 12.12.16. Формат 60 х 84 1/16.
Усл. печ. л. 1,51. Уч.-изд. л. 0,88. Тираж . Заказ .
Цена договорная.

Издательство Бурятского госуниверситета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: riobsu@gmail.com

Отпечатано в типографии Бурятского госуниверситета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Сухэ-Батора, 3а